Mara Alagić (Sarajevo) **Mirjana Malenica** (Sarajevo)

NEKI VAŽNI PRIMERI PREBROJIVIH SKUPOVA

Susret sa pojmom prebrojivog skupa predstavlja nešto novo i neobično, i važno je da se taj pojam i intuitivno usvoji.

1. Neka je f preslikavanje skupa A u skup B, tj.

$$f\colon A\to B.$$

Ako je u preslikavanju f svaki element drugog skupa slika

(a) bar jednog

(b) najviše jednog

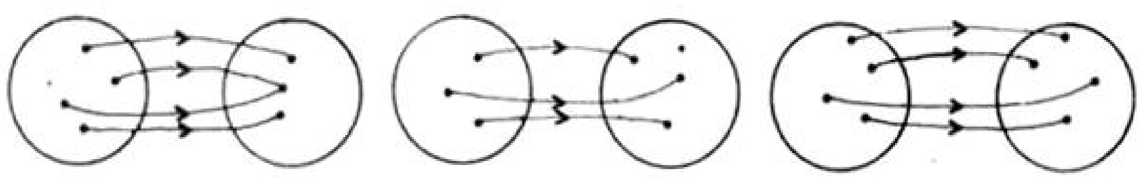
(c) jednog i samo jednog (tačno jednog) elementa prvog skupa, onda to preslikavanje nazivamo u slučaju

(a) sirjekcija („na" preslikavanje)

(b) injekcija

(c) bijekcija.

Ovi se pojmovi mogu jednostavno ilustrovati na sledeći način:



(a) (b) (c)

Kaže se da je skup A ekvipotentan skupu B ako postoji bijekcija $f\colon A\to B$, sa skupa A na skup B.

Ako postoji bijekcija $f\colon A\to B$ onda postoji i bijekcija $f^{-1}\colon B\to A$. Otuda, kaže se da su skupovi A i B (međusobno) ekvipotentni, što označavamo sa $A\sim B$. S obzirom da je identično preslikavanje skupa na samog sebe, $id_A\colon A\to A$ bijekcija, svaki skup je ekvipotentan sam sebi. Ako su ekvipotentni skupovi A i B, i skupovi B i C tada su ekvipotentni i skupovi A i C. Naime, $A\sim B$ i $B\sim C$ znači da postoji bijekcije $f\colon A\to B$ i $g\colon B\to C$. To znači da je svaki element skupa C slika tačno jednog elementa iz skupa B u preslikavanju g, a svaki element skupa B slika tačno jednog elementa iz skupa A u preslikavanju f. Tada je svaki element skupa C slika tačno jednog elementa iz skupa A u preslikavanju $g\circ f$.

Dakle, ekvipotentnost je simetrična, refleksivna i tranzitivna relacija, kraće relacija ekvivalencije.

2. Definicije

Definicija 1. Kažemo da je skup A konačan skup ako je $A=\emptyset$ ili $A\sim I_n$ za neko $n\in N$, pri čemu je I_n skup prvih n prirodnih brojeva, tj. $I_n=\{1, 2, \ldots, n\}$.

Definicija 2. Skup koji nije konačan je beskonačan.

Definicija 3. Za skup A kažemo da je prebrojiv ako je konačan ili ako je $N\sim A$. Za sve ostale skupove A kaže se da su neprebrojivi.

Dakle, skup A je prebrojiv ako je konačan ili ako je ekvipotentan skupu prirodnih brojeva. Ako je skup A ekvipotentan skupu N, onda postoji bijekcija $f: A\to N$. Stavimo

$$a_1=f(1),\ a_2=f(2),\ \ldots,\ a_n=f(n),\ \ldots$$

Skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ je na taj način uređen ako kažemo da za $m<n$ je a_m „ispred" a_n. Na primer, s obzirom da je $5<6<7$ biće a_5 „ispred" a_6, i a_6 „ispred" a_7, itd. Ovaj skup nazivamo nizom, njegove elemente članovima niza. Kažemo da smo elemente skupa A numerisali ili svrstali u niz. Drugim rečima,

Skup A je prebrojiv ako se njegovi elementi mogu svrstati u niz.

3. Primeri

Primer 1. $Z\sim N$, Z je skup svih celih brojeva.

Naime, postoji bijekcija $f: N\to Z$ zadana ovako:

$$f(1)=0$$
$$f(2k)=k,\ k\in N$$
$$f(2k+1)=-k$$

(odnosno, elementi skupa Z mogu se svrstati u niz $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$).

Zadatak. Nađi neku drugu bijekciju sa skupa Z na skup N.

Primer 2. $N\times N\sim N$, N je skup prirodnih brojeva, $N\times N= =\{(k, n): k\in N,\ n\in N\}$.

Predstavićemo skupove $N\times N$ i N u obliku koji će nam pomoći da lakše uočimo bijekciju sa jednog skupa u drugi. Neka je

$$
\begin{array}{ll}
A_1=\{(1,n):n\in N\} & B_1=\{2n-1:n\in N\} \\
A_2=\{(2,n):n\in N\} & B_2=\{2(2n-1):n\in N\} \\
A_3=\{(3,n):n\in N\} & B_3=\{4(2n-1):n\in N\} \\
A_4=\{(4,n):n\in N\} & B_4=\{8(2n-1):n\in N\} \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

Na ovaj način se skup $N\times N$ može predstaviti kao unija međusobno disjunktnih skupova A_1, A_2, A_3, ... a skup N kao unija skupova B_1, B_2, B_3, ... koji su takođe međusobno disjunktni.

Svakom elementu iz skupa A_1 možemo pridružiti tačno jedan element skupa B_1, svakom elementu skupa A_2 tačno jedan element skupa B_2, itd. Na primer, elementu (1,3) skupa A_1 pridružuje se element $2\cdot 3-1=5$ skupa B_1, ... To znači da postoje bijekcije

$$f_1:A_1\to B_1;\quad f_2:A_2\to B_2;\quad \ldots\quad f_n:A_n\to B_n;\quad \ldots$$

Ostaje da uočimo bijekciju $f:N\times N\to N$. Imajući u vidu da su skupovi A_1, A_2, ... svaka dva disjunktni, a takođe i skupovi B_1, B_2, ..., svaki element $x\in N\times N$ pripada tačno jednom od skupova A_1, A_2, ... Neka je to skup A_m. S obzirom da je $A_m\sim B_m$ postoji bijekcija $f_m:A_m\to B_m$ koja preslikava element x u element $f_m(x)$ koji pripada skupu B_m, pa dakle skupu N. Prirodno je sada definisati preslikavanje f sa

$$f(x)=f_m(x).$$

Naime, funkcija f preslikava $N\times N$ u N preslikavajući jedan po jedan skup A_1, A_2, ... postojećim preslikavanjima f_1, f_2, ... u odgovarajući skup B_1, B_2, ... Kako bismo svrstali ove parove (k,n) prirodnih brojeva u niz? Ovako:

$$(1,1),\quad (1,2),\quad (2,1),\quad (3,1),\quad (2,2),\quad (1,3),\quad (1,4),\quad \ldots$$

Primer 3. Skup svih nenegativnih racionalnih brojeva je prebrojiv skup.

Dokaz: Svaki nenegativni racionalan broj pisaćemo u obliku

$$\frac{p}{q}\ (p\geqslant 0,\ q>0),\quad p \text{ i } q \text{ su relativno prosti.}$$

Nazovimo „visinom" razlomka $\frac{p}{q}$ broj $p+q$. Dogovorimo se pri tome da broj 0 pišemo u obliku $\frac{0}{1}$. Sada ćemo sve nenegativne razlomke svrstati u niz na sledeći način: Prvo ćemo napisati sve one razlomke čija je „visina“ jednaka 1. Jedini je takav 0. Zatim ćemo napisati sve razlomke koji imaju „visinu“ 2, zatime one čija je „visina“ 3, itd.

Tako se skup nenegativnih racionalnih brojeva može svrstati u niz

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \ldots$$

I skup svih racionalnih brojeva je prebrojiv skup. Njegovi elementi se mogu svrstati u niz na sledeći način:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots$$

Zadatak: Nađi bijekciju sa skupa N u skup Q svih racionalnih brojeva.

Primer 4. Svaki podskup prebrojivog skupa je konačan ili prebrojiv.

Dokaz. Neka je A prebrojiv skup a A_1 njegov podskup. Tvrdimo da je A_1 konačan ili prebrojiv.

Ako je A_1 prazan skup, onda je po definiciji konačnog skupa (Definicija 1) taj skup konačan. Neka je $A_1 \neq \emptyset$. S obzirom da je skup A prebrojiv to se svi njegovi elementi mogu svrstati u niz

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Ako u ovome nizu idemo od a_1 udesno, posle izvesnog broja koraka sigurno ćemo naići na neki element podskupa A_1 (jer je A_1 neprazan skup). Označimo prvi od elemenata skupa A_1 na koji nailazimo sa a_{n_1}. Ako nastavimo kretanje udesno, može se dogoditi dvoje:

(1) ne nailazimo više na elemente skupa A_1 i tada je očigledno $A_1 = \{a_{n_1}\}$, pa je skup A_1 konačan;

(2) kretanjem udesno nailazimo na elemente podskupa A_1. Neka je a_{n_2} prvi od elemenata skupa A_1 na koji nailazimo posle a_{n_1}. Ako nastavimo kretanje udesno i razmišljanje kao u prethodnom slučaju, zaključujemo:

Kretanjem udesno nailazimo na elemente skupa A_1:

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ \ldots,\ a_{n_k}.$$

Ako posle izvesnog broja koraka ne nailazimo više na elemente skupa A_1, tada je očigledno skup A_1 konačan. Ako pak kretanjem udesno stalno nailazimo na elemente skupa A_1 dobijamo niz

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ \ldots,\ a_{n_k},\ \ldots$$

Ovaj niz sadrži sve elemente podskupa A_1 i samo njih. Dakle, elemente skupa A_1 svrstali smo u niz, tj. A_1 je prebrojiv skup.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија