

Регионален натпревар 2011

I година

1А. Димитар на некој начин цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ги распоредил на кружна. Секои три последователни цифри, во насока на стрелките на часовникот, формираат трицифрен број. Сите такви броеви тој ги собрал. Кој збир го добил Димитар?

Решение. Секоја запишана цифра ќе се појави во три различни броја, еднаш како цифра на стотки, еднаш како цифра на десетки и еднаш како цифра на единици. Според тоа, цифрата n во вкупниот збир ќе учествува со

$$(1+10+100)n = 111n.$$

Бидејќи вкупно има 9 такви броја, добиваме дека вкупниот збир ќе биде

$$111(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 111 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 111 \cdot 45 = 4995.$$

1Б. Најди ги сите трицифрени броеви A , за кои аритметичката средина на броевите добиени со пермутација на цифрите на бројот A , е еднаква на бројот A .

Решение. Нека $A = \overline{abc}$ е дадениот број кој ги исполнува условите од задачата. Броеви добиени со пермутација на цифрите на бројот A се $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. Тогаш

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 6\overline{abc}$$

од каде што добиваме

$$222(a+b+c) = 6(100a+10b+c),$$

или $7a = 3b + 4c$. Последната равенка може да се решава во множеството $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, заменувајќи последователно $a = 1, a = 2, \dots, a = 9$ и решавајќи ги добиените равенки.

Постапката може да се скрати ако равенката $7a = 3b + 4c$ ја запишеме во обликот $7(a-b) = 4(c-b)$. Тогаш според признаците за деливост имаме

$$a = b = c \text{ или } \begin{cases} a-b=4 \\ c-b=7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b-a=4 \\ b-c=7 \end{cases}.$$

Во првиот систем

$$\begin{cases} a-b=4 \\ c-b=7 \end{cases},$$

исполнето е неравенството $0 \leq b \leq 2$, а во вториот систем исполнето е неравенството $7 \leq b \leq 9$.

Сите решенија на задачата се

$$111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 407, 518, 629, 370, 481, 592.$$

2. Во 20 часот биле запалени две еднакво долги свеќи. По извесно време свеќите биле изгаснати и притоа е констатирано дека остатокот од првата свеќа е 4 пати поголем од остатокот на втората свеќа. Пресметај во колку часот се изгаснати свеќите, ако се знае дека првата свеќа изгорува за 5 часа, а втората за 4 часа.

Решение. Нека со a ја означиме должината на свеќите. Тогаш, за x часови од првата свеќа ќе изгори $\frac{a}{5}x$, а од втората $\frac{a}{4}x$. Значи останало од првата свеќа $a - \frac{a}{5}x$, а од втората $a - \frac{a}{4}x$. Според условот на задачата следува дека остатокот од првата свеќа е 4 пати поголем од остатокот на втората свеќа, имаме:

$$a - \frac{a}{5}x = 4(a - \frac{a}{4}x).$$

По решавањето на равенката се гледа дека должината на свеќата не влијае на решението. Се добива $x = 3\text{h } 45\text{min}$, што значи дека свеќите се изгаснати во 23 часот и 45 минути.

3. Пред секој од броевите $1, 2, \dots, 2011$, изберете еден од знаците $+$ или $-$, така што изразот $A = |\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm 2011|$ да има најмала вредност.

Решение. Јасно е дека $A \geq 0$. Ако најдеме избор на знаци за кој $A = 0$, тогаш за таквиот избор A има најмала вредност. Пред првите три броеви ги избираме знаците $-$, $-$ и $+$, а пред останатите 2008 броја (2008 е делив со 4), ги избираме наизменично знаците $+$, $-$, $-$, $+$. Се добива:

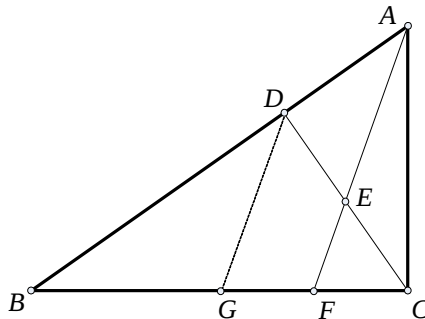
$$A = |-1 - 2 + 3 + (4 - 5 - 6 + 7) + (8 - 9 - 10 + 11) + \dots + (2008 - 2009 - 2010 + 2011)| = 0.$$

4A. Во правоаголниот триаголник ABC , точката D е подножје на висината спуштена од темето C врз хипотенузата AB , точката E е средина на висината CD , а точката $\{F\} = AE \cap BC$. Ако $\overline{AD} = 4$ и $\overline{BD} = 9$. Пресметај ја должината на отсечката AF .

Решение. Од равенството $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$ кое важи за правоаголниот триаголник ABC добиваме дека $\overline{CD} = 6$, а бидејќи точката E е средина на висината CD , имаме $\overline{DE} = 3$.

Од правоаголниот триаголник AED имаме $\overline{AE} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Нека G е точка на страната BC , таква што $DG \parallel AF$. Бидејќи EF е средна линија на триаголникот CDG , ако означиме $\overline{EF} = x$, тогаш $\overline{DG} = 2x$.

Од сличноста на триаголниците AFB и DGB следува дека



$$\frac{\overline{AF}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}, \text{ т.е. } \frac{5+x}{2x} = \frac{13}{9} \Rightarrow x = \frac{45}{17}.$$

Значи $\overline{AF} = \frac{130}{17}$.

4Б. Нека a, b, c се должините на страните, s е полупериметарот и P е плоштината на триаголникот ABC , при што $a < c$ и $b < c$. Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен ако и само ако $(s-a)(s-b) = P$.

Решение. *Прв начин.* Ако триаголникот ABC е правоаголен, тогаш c е хипотенуза. Имаме:

$$(s-a)(s-b) = \frac{c+b-a}{2} \cdot \frac{c-b+a}{2} = \frac{c^2 - (b-a)^2}{4} = \frac{c^2 - b^2 - a^2 + 2ab}{4} = \frac{ab}{2} = P.$$

Обратно, нека за триаголникот ABC важи $(s-a)(s-b) = P$. Тогаш,

$$\frac{c^2 - b^2 - a^2 + 2ab}{4} = \frac{ab}{2}$$

и оттука $c^2 = a^2 + b^2$, па триаголникот ABC е правоаголен.

Втор начин. Равенството $(s-a)(s-b) = P$ е еквивалентно со

$$\frac{c+b-a}{2} \cdot \frac{c-b+a}{2} = \frac{ab}{2},$$

односно со

$$\frac{c^2 - b^2 - a^2 + 2ab}{4} = \frac{ab}{2}.$$

Последното равенство е еквивалентно со $c^2 = a^2 + b^2$, што важи ако и само ако триаголникот ABC е правоаголен.

II година

1. Определи ги сите вредности на природниот број n за кои системот

$$\begin{cases} x + y = n^2 \\ 10x + y = n^3 \end{cases}$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка добиваме

$$9x = n^2(n-1).$$

Бидејќи бараме решенија во множеството природни броеви имаме $9 \mid n^2(n-1) \dots$

Според тоа, можни се два случаи.

Случај 1. $3 \mid n$. Тогаш $x = k^2(3k-1)$ и $y = k^2(10-3k)$, каде $n = 3k$, за некој природен број k . Бидејќи y е природен број, можни вредности за k се 1, 2 и 3. Во тој случај $n = 3, 6, 9$.

Случај 2. Нека $9x = n^2(n-1)$ и $9 \mid n-1$. Тогаш постои природен број m таков што $n = 9m+1$, па затоа $x = m(9m+1)^2$ и $y = (9m+1)^2(1-m)$, односно за ниеден природен број m , y не може да биде природен број.

Значи, единствени вредности за n за кои системот има решенија во множеството природни броеви се 3, 6 и 9.

2. Нека a и b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 1 + a + b.$$

Решение. Бидејќи a и b се позитивни реални броеви, следните неравенства се еквивалентни

$$ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 1 + a + b,$$

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 \geq ab(1 + a + b),$$

$$2a^2b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a^2b - 2ab^2 \geq 0,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2b^2 - 2a^2b + a^2 + a^2b^2 - 2b^2a + b^2 \geq 0,$$

$$(a-b)^2 + a^2(b^2 - 2b + 1) + b^2(a^2 - 2a + 1) \geq 0,$$

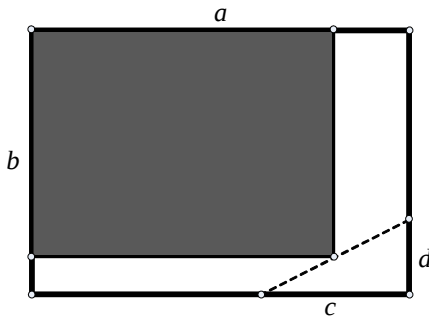
$$(a-b)^2 + a^2(b-1)^2 + b^2(a-1)^2 \geq 0.$$

Последното равенство е точно бидејќи секој собирок е ненегативен. Знак за равенство важи ако и само ако секој собирок во последното равенство е нула. Според тоа $a = b = 1$.

3А. Нека a, b, c се должините на страните на триаголникот ABC , а h_a, h_b, h_c се должините на соодветните висини. Ако $a + h_a = b + h_b = c + h_c$ тогаш триаголникот ABC е рамнострани. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека триаголникот ABC не е рамнострани, односно нека $a \neq b$. Од $h_a = b \sin \gamma$ и $h_b = a \sin \gamma$ имаме $a + b \sin \gamma = b + a \sin \gamma$, односно $(1 - \sin \gamma)(a - b) = 0$. Тогаш, $1 - \sin \gamma = 0$ и оттука $\gamma = 90^\circ$. Значи, c е хипотенуза и затоа $a \neq c$. Тогаш, $(a - c)(1 - \sin \beta) = 0$, односно $\beta = 90^\circ$, а со тоа добиваме контрадикција. Аналогно се разгледуваат и другите случаи ($b \neq c$, $a \neq c$)

3Б. Од правоаголна плоча со страни a, b исечено е триаголно коше со катети $c = \frac{a}{3}$ и $d = \frac{b}{3}$ (види цртеж). Од преостанатиот дел исечи нова правоаголна плоча со страни паралелни на страните од дадената правоаголна плоча (види



цртеж), така што нејзината плоштина P да биде најголема. Колку изнесува таа плоштина?

Решение. Од цртежот, имаме:

$$P = (b - y)(a - x).$$

Бидејќи $y : d = (c - x) : c$, т.е.

$$y = d - \frac{d}{c}x,$$

добиваме

$$P = (b - d + \frac{d}{c}x)(a - x)$$

добиваме

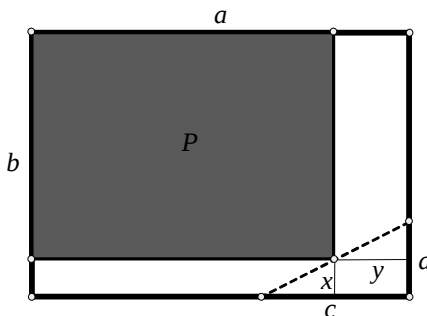
$$P = ab - ad + \frac{1}{4cd}(ad + cd - bc)^2 - \underbrace{\frac{d}{c}\left[x - \frac{1}{2d}(ad + cd - bc)\right]^2}_{*}.$$

Членот $*$, кој зависи од x не треба да биде негативен, па според тоа плоштината е најголема ако овој член е најмал, т.е. ако е еднаков на нула, односно

$$x = \frac{1}{2d}(ad + cd - bc)$$

и тогаш

$$P = ab - ad + \frac{1}{4cd}(ad + cd - bc)^2.$$



4А. Нека $x_1 > 0$ и $x_2 = 4x_1$ се корените на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$, за чии коефициенти важи $3a = 2(c - b)$. Најди ги корените на равенката.

Решение. Да забележиме дека $a \neq 0$, во спротивно равенката не е квадратна. Користејќи ја формулата за разложување на квадратен трином кога се познати корените на соодветната квадратна равенка, може да запишеме

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Заменувајќи ги условите на задачата добиваме

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - 4x_1) = ax^2 - 5ax_1x + 4ax_1^2.$$

Споредувајќи ги коефициентите на квадратните триноми имаме $b = -5ax_1$, $c = 4ax_1^2$. Овие вредности ќе ги замениме во условот за коефициентите, па оттука $3a = 2(4ax_1^2 + 5ax_1)$. Ако равенката се подели со $a \neq 0$ следува дека x_1 е корен на квадратната равенка $8x_1^2 + 10x_1 - 3 = 0$, со решенија $x_{1_1} = \frac{1}{4}$ и $x_{1_2} = -\frac{3}{2}$. Со оглед на тоа што $x_1 > 0$, останува $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1$.

4Б. Нека a и b се различни цели броеви за кои равенката $(x - a)(x - b) = -1$ има цел корен r . Докажи дека $a + b = 2r$.

Решение. Нека a, b, r се цели броеви и од тоа што $ab > 0$ е корен на дадената равенка важи $(r-a)(r-b) = -1$. Сега, $r-a, r-b$ се цели броеви чиј производ е -1 . Ова е можно само во случај кога едниот множител е 1 , а вториот множител -1 . Значи можни се два случаи и тоа:

$$\begin{cases} r-a=1 \\ r-b=-1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} r-a=-1 \\ r-b=1 \end{cases}.$$

Собирајќи ги равенките во двата системи, се добива $2r-a-b=0$, односно $a+b=2r$, што и требаше и да се докаже.

III година

1. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \geq 64.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$\begin{aligned} (1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) &= 1 + \frac{yz+zx+xy}{xyz} + \frac{x+y+z}{xyz} + \frac{1}{xyz} \\ &\geq 1 + \frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{xyz} + \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{xyz} + \frac{1}{xyz} \\ &= 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{3}{\sqrt[3]{(xyz)^2}} + \frac{1}{xyz} \\ &= (1 + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}})^3 \geq (1 + \frac{3}{x+y+z})^3 = 64 \end{aligned}$$

2A. Позитивните реални броеви го исполнуваат равенството

$$\log(1+a^2) - \log a - 2\log 2 = 1 - \log(100+b^2) + \log b.$$

Пресметај го збирот $a+b$.

Решение. Со алгебарски трансформации, од осбините на логаритми добиваме

$$\log(1+a^2) + \log(100+b^2) = \log a + \log 4 + \log 10 + \log b$$

$$\log[(1+a^2)(100+b^2)] = \log 40ab$$

Заради тоа што $y = \log x$ е монотона функција, имаме

$$\log[(1+a^2)(100+b^2)] = \log 40ab,$$

$$(1+a^2)(100+b^2) = 40ab \quad (*)$$

Од тоа што $a, b \in \mathbb{R}^+$, според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$1+a^2 \geq 2a$$

$$100+b^2 \geq 20b$$

и важат знаци за равенство ако и само ако $a=1$ и $b=10$. Значи, ако $a \neq 1$ или $b \neq 10$, тогаш

$$(1+a^2)(100+b^2) > 40ab,$$

што е во спротивност со (*).

Значи, $a=1, b=10$ од каде добиваме $a+b=1+10=11$.

2Б. Определи ги сите решенија на равенката

$$3^x + 3^y + 3^z = 21897,$$

такви што $x, y, z \in \mathbb{N}$ и $x < y < z$.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$3^x(1+3^{y-x}+3^{z-x}) = 27 \cdot 811.$$

Бидејќи $(3^x, 811) = 1$ и $(1+3^{y-x}+3^{z-x}, 27) = 1$, од последната равенка добиваме

$$\begin{cases} 3^x = 27 \\ 1+3^{y-x}+3^{z-x} = 811 \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $x=3$, а втората равенка го добива обликот

$$3^{y-3} + 3^{z-3} = 810$$

$$3^{y-3}(1+3^{z-y}) = 3^4 \cdot 10.$$

Заради $(3^{y-3}, 10) = 1$ и $(1+3^{z-y}, 3^4) = 1$, добиваме

$$\begin{cases} 3^{y-3} = 3^4 \\ 1+3^{z-y} = 10 \end{cases}$$

Од првата равенка имаме $y-3=4$, т.е. $y=7$, а втората следува $3^{z-7} = 3^2$.

Конечно, решение на почетната равенка е $x=3, y=7, z=9$.

3А. Во множеството реални броеви, реши ја равенката

$$\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a}, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ и } a, b > 0.$$

Решение. Од равенката следува дека $b \cos x + a \neq 0$ и $b \sin x + a \neq 0$, па множејќи ја равенката со $(b \cos x + a)(b \sin x + a)$ ја добиваме равенката

$$(a \sin x + b)(b \sin x + a) = (a \cos x + b)(b \cos x + a)$$

која е еквивалентна на почетната.

Со множење и соодветно групирање, ја добиваме равенката

$$(\sin x - \cos x)(a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x)) = 0.$$

Значи

$$\sin x - \cos x = 0 \text{ или } a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) = 0.$$

Од $\sin x - \cos x = 0$ добиваме дека $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се решенија на почетната равенка.

Од $a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) = 0$ и $ab > 0$ добиваме дека

$$\sin x + \cos x = -\frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Користејќи дека $a^2 + b^2 \geq 2ab$ добиваме $\sin x + \cos x = -\frac{a^2 + b^2}{ab} \leq -\frac{2ab}{ab} = -2$.

Множејќи го ова неравенство со $\frac{\sqrt{2}}{2}$ добиваме

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = -2 \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ т.е. } \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\sqrt{2},$$

што не е можно. Значи равенката $a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) = 0$ нема решение.

Според тоа, сите решенија на почетната равенка се $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Забелешка. Заклучокот дека равенката $a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) = 0$ нема решение може да се изведе и на следниов начин:

Јасно е дека $\sin x + \cos x \geq -2$.

Ако $\sin x + \cos x = -2$, заради $\sin x \geq -1$ и $\cos x \geq -1$ добиваме дека $\sin x = -1$ и $\cos x = -1$, па $\sin^2 x + \cos^2 x = 2$ што не е можно.

Значи, $\sin x + \cos x > -2$.

Сега имаме $a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) > a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, па равенката $a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) = 0$ нема решение.

ЗБ. Нека a, b, c се страните на еден триаголник. Одреди го аголот спроти страната c , ако важи

$$(a + b + c)(a + b - c) = 3ab.$$

Решение. Од даденото равенство добиваме

$$(a + b)^2 - c^2 = 3ab, \text{ т.е. } a^2 + b^2 - c^2 = ab.$$

Од косинусната теорема, за аголот γ , спроти c , важи $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, па затоа

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}.$$

Бидејќи γ е агол во триаголник, важи $0 < \gamma < 180^\circ$. Следува дека $\gamma = 60^\circ$.

4. Даден е триаголникот $\triangle ABC$. На страната BC избрани се точки D и E така што $\overline{BD} = \overline{EC}$ и $\angle BAD = \angle CAE$. Докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Да забележиме дека $P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ACE}$ бидејќи имаат еднакви основи и заедничка висина. Од тоа имаме

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} \sin \angle BAD}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AE} \sin \angle CAE}{2},$$

односно

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{AE}. \quad (1)$$

Аналогно $P_{\triangle ABE} = P_{\triangle ACD}$, од што се добива

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AE} \sin \angle BAE}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD} \sin \angle CAD}{2},$$

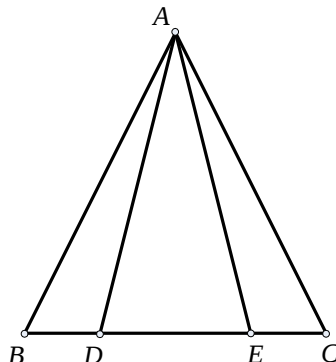
односно

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}. \quad (2)$$

Ако ги помножиме равенствата (1) и (2) добиваме

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AC}^2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AD}.$$

Од ова се добива $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$, односно $\overline{AB} = \overline{AC}$.



IV година

1. Докажи дека за секој природен број $n \in \mathbb{N}$ е исполнето неравенството

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \cdots + \frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!} + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} < \frac{1}{2}.$$

Решение. За секој природен број k имаме:

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!} = \frac{k+2}{k![1+(k+1)+(k+2)(k+1)]} = \frac{k+2}{k!(k+2)^2} = \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$$

Сега,

$$\begin{aligned} \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \cdots + \frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!} + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} &= \\ &= \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!} < \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

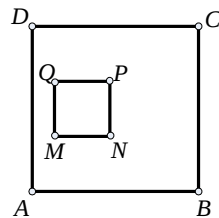
2Б. Докажи дека ако страните на триаголникот образуваат аритметичка прогресија, тогаш радиусот на впишаната кружница е $\frac{1}{3}$ од должината на висината спуштена кон средната по големина страна.

Решение. Нека a , $a+d$, $a+2d$ се страни на триаголникот, h е висина спуштена на страната $a+d$, r е радиусот на впишаната кружница. Плоштината на триаголникот е $P = \frac{(a+d)h}{2}$, а од друга страна

$$P = s \cdot r = \frac{a+(a+d)+(a+2d)}{2} \cdot r = \frac{3(a+d)r}{2}.$$

Значи, $\frac{(a+d)h}{2} = \frac{3(a+d)r}{2}$, од каде $h = 3r$, односно $r = \frac{1}{3}h$.

2А. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е впишан квадрат $MNPQ$ чии што страни се паралелни со страните на квадратот $ABCD$ (види цртеж). Докажи дека правите BQ , DN , AP и CM минуваат низ иста точка.



Решение. Без губење на општоста, претпоставуваме дека страната на квадратот $ABCD$ е со должина 1. Поставуваме координатен систем со координатен почеток во точката A и координатни оски AB (x -оска) и AD (y -оска). Тогаш: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ и $D(0,1)$. Нека координатите на M се (a,b) , каде што $0 < a, b < 1$. Тогаш координатите на другите точки се: $N(a+s, b)$, $P(a+s, b+s)$, $Q(a, b+s)$, каде што s е должината на страната на квадратот $MNPQ$ (јасно, $s < 1$). Тогаш равенките на правите BQ , DN , AP и CM се

$$y = \frac{b+s}{a-1}x - \frac{b+s}{a-1}, \quad y = \frac{b-1}{a+s}x + 1, \quad y = \frac{b+s}{a+s}x, \quad y = \frac{b-1}{a-1}x + \frac{a-b}{a-1},$$

соодветно. Пресечната точка на правите DN и AP е $S(\frac{a+s}{s+1}, \frac{b+s}{s+1})$. Со проверка се утврдува дека S лежи и на правите BQ и CM .

3А. Дадени се 8 различни природни броеви, сите помали од 16. Докажи дека меѓу позитивните разлики на секои два од нив, постојат барем 3 меѓусебно еднакви.

Решение. Нека броевите се $a_1, a_2, \dots, a_8$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_8 < 16$. Вкупниот број позитивни разлики што ги даваат овие броеви е $\binom{8}{2} = 28$, додека од $1 \leq a_j < a_i < 16$ следува дека $1 \leq a_j - a_i \leq 14$, односно $a_j - a_i$ може да прими најмногу 14 различни вредности. Бидејќи 28 разлики примаат вредности од множество со 14 елементи и бидејќи неможе да се случи две разлики да се 14 ($a_j - a_i = 14$ ако и само ако $a_j = 15$, $a_i = 1$), од принципот на Дирихле следува дека најмалку 3 разлики се еднакви меѓусебе.

3Б. Докажи дека ако $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, се такви што $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \in (0^\circ, 180^\circ)$, каде n е природен број поголем од 1, тогаш

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) < \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n.$$

Решение. Неравенството ќе го покажеме со помош на математичка индукција. Неравенството е точно за $n = 2$. Навистина, имајќи во предвид дека α_1, α_2 припаѓаат во интервалот $(0^\circ, 180^\circ)$, тогаш

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 < \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2.$$

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за $n = k$, односно дека за $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ такви $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \in (0^\circ, 180^\circ)$ важи

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) < \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_k.$$

За $n = k + 1$ се добива дека

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \alpha_{k+1}) &= \sin((\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) + \alpha_{k+1}) \\ &= \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) \cos \alpha_{k+1} + \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) \sin \alpha_{k+1} \\ &< \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) + \sin \alpha_{k+1} \\ &< \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_k + \sin \alpha_{k+1}, \end{aligned}$$

од каде согласно принципот на математичка индукција следува точноста на неравенството за секој природен број поголем од 1.

4. Определи го полиномот $P(x)$ ако тој е од четврти степен, $P(0) = 0$ и $P(x) - P(x-1) = x^3$, за секој реален број x . Користејќи го добиениот резултат пресметај го збирот $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

Решение. Ако во функционалната равенка $P(x) - P(x-1) = x^3$ замениме $x = 0$, добиваме $P(0) - P(-1) = 0$ и заради $P(0) = 0$, имаме $P(-1) = 0$. Значи, $x = -1$ е нула на полиномот. Полиномот е од четврти степен, па според тоа

$$P(x) = x(x+1)(ax^2 + bx + c).$$

Добиваме

$$x(x+1)(ax^2 + bx + c) - (x-1)x(a(x-1)^2 + b(x-1) + c) = x^3$$

односно

$$x^2(4a-1) + x(3a-3b) + 2c + a - b = 0.$$

Полиномот од левата страна на последното равенство е нулти, ако и само ако

$$\begin{cases} 4a - 1 = 0 \\ 3a - 3b = 0 \\ 2c + a - b = 0 \end{cases}$$

Решение на системот е $c = 0, a = b = \frac{1}{4}$. Значи, бараниот полином е

$$P(x) = \frac{1}{4} x^2 (x+1)^2$$

Ако во функционалната равенка замениме редоследно $x = 1, 2, 3, \dots, n$, тогаш ја добиваме низата равенства

$$\begin{aligned} P(1) - P(0) &= 1^3 \\ P(2) - P(1) &= 2^3 \\ &\dots\dots\dots \\ P(n) - P(n-1) &= n^3 \end{aligned}$$

Од тоа што $P(0) = 0$, ако ги собереме претходните равенства, добиваме

$$P(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

Сега, јасно е дека

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$