

ММО 2005

1. Ако p е прост број поголем од 3, докажи дека $3^p - 2^p - 1$ е делив со $42p$.

Решение. Ако $p = 7$, тогаш $3^p - 2^p - 1 = 2187 - 128 - 1 = 2058 = 42 \cdot 49$. Нека $p > 3$ е прост број различен 7. Тогаш од Малата теорема на Ферма следува $3^p - 2^p - 1 \equiv 3 - 2 - 1 = 0 \pmod{p}$. Понатаму, $p = 6k + 1$ или $p = 6k + 5$ за некој $k \in \mathbb{N}$.

Ако $p = 6k + 1$, тогаш

$$3^p = (3^6)^k \cdot 3 \equiv 3 \pmod{7} \text{ и } 2^p = (2^6)^k \cdot 2 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$2^p = (2^2)^{3k} \cdot 2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ и } 3^p \equiv 3 \pmod{3},$$

$$3^p \equiv 1 \equiv 3 \pmod{2} \text{ и } 2^p \equiv 2 \pmod{2},$$

па затоа

$$3^p - 2^p - 1 \equiv 0 \pmod{7}, \quad 3^p - 2^p - 1 \equiv 0 \pmod{2} \text{ и } 3^p - 2^p - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Но, 2, 3, 7 и p се заемно прости, па затоа $3^p - 2^p - 1 \equiv 0 \pmod{42p}$.

Ако $p = 6k + 5$, тогаш

$$3^p = (3^6)^k \cdot 3^5 \equiv 5 \pmod{7} \text{ и } 2^p = (2^6)^k \cdot 2^5 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$2^p = (2^2)^{3k+2} \cdot 2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ и } 3^p \equiv 3 \pmod{3},$$

$$3^p \equiv 1 \equiv 3 \pmod{2} \text{ и } 2^p \equiv 2 \pmod{2},$$

па затоа

$$3^p - 2^p - 1 \equiv 0 \pmod{7}, \quad 3^p - 2^p - 1 \equiv 0 \pmod{2} \text{ и } 3^p - 2^p - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Но, 2, 3, 7 и p се заемно прости, па затоа $3^p - 2^p - 1 \equiv 0 \pmod{42p}$.

2. Во квадрат $ABCT$ точките K и P се средини на страните BC и AT , соодветно. На правата AC е избрана точка M таква што A е меѓу M и C . Правата MK ја сече страната AB во точка S . Докажи дека $\angle MPA = \angle SPA$.

Решение. При ознаки како на цртежот десно имаме

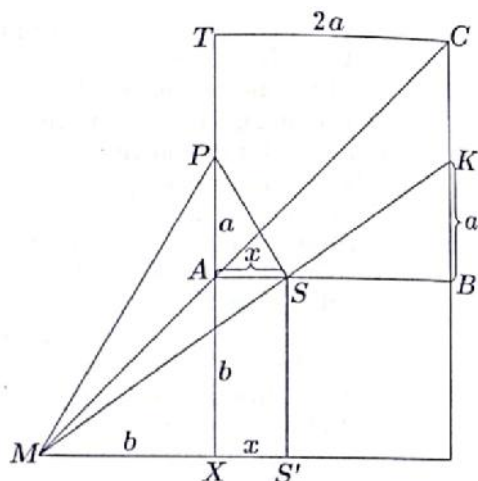
$$(b+x):b = (2a+b):(a+b),$$

$$b^2 + ba + x(a+b) = 2ab + b^2,$$

$$x(a+b) = ab,$$

$$x:a = b:(a+b).$$

Од последната пропорција следува дека триаголниците MPX и SPA се слични, па затоа важи $\angle MPA = \angle SPA$, што и требаше да се докаже.



3. Определи ги сите позитивни реални броеви a, b, c, d за кои важи

1) $16abcd = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(abc + bcd + cda + dab)$ и

2) $2ab + 2cd + ac + ad + bc + bd = 8$.

Решение. Од условот 1) имаме

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{16abcd}{(a^2+b^2+c^2+d^2)(abc+bcd+cda+dab)} = \frac{1}{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \cdot \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \\ &\leq \frac{1}{\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2} \cdot \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{4}{a+b+c+d}, \end{aligned}$$

па затоа $a + b + c + d \leq 4$. Притоа знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c = d = 1$. Од условот 2) имаме

$$\begin{aligned} 16 &= 4ab + 4cd + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd \\ &= 2ab + 2cd + 2ab + 2cd + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd \\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2cd + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd \\ &= (a + b + c + d)^2, \end{aligned}$$

па затоа $4 \leq a + b + c + d$.

Според тоа, $a + b + c + d = 4$, од каде следува дека $a = b = c = d = 1$.

4. Определи ги сите функции $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такви што

$$xf(yz) + yf(z) + z = f(f(x)yz + f(y)z + f(z)). \quad (1)$$

Решение. Во (1) ставаме $z = 0$ и добиваме $(x+y)f(0) = f(f(0))$, за секои $x, y \in \mathbb{Q}$, па затоа $f(0) = 0$. Сега, ако во (1) ставиме $x = y = 0$, добиваме $z = f(f(0)z + f(z))$ и како $f(0) = 0$, добиваме $f(f(z)) = z$, што значи дека f е биекција. Но, тоа значи дека $f(x) = 0$ ако и само ако $x = 0$. Ако во (1) ставиме $x = y = -1$, по средовањето добиваме $-f(-z) - f(z) + z = f(f(z))$ и како $f(f(z)) = z$, од последното равенство следува $f(-z) = -f(z)$, за секој $z \in \mathbb{Q}$.

Понатаму, ако во (1) ставиме $x = \frac{f(1)-1}{f(-1)}, y = -1, z = 1$ и искористиме дека $f(-z) = -f(z)$ и $f(f(z)) = z$ добиваме

$$\begin{aligned} \frac{f(1)-1}{f(-1)} f(-1) - f(1) + 1 &= f(-f(\frac{f(1)-1}{f(-1)}) + f(-1) + f(1)) \\ &= f(-f(\frac{f(1)-1}{f(-1)})) \\ &= -f(f(\frac{f(1)-1}{f(-1)})) \\ &= -\frac{f(1)-1}{f(-1)}, \end{aligned}$$

односно $-\frac{f(1)-1}{f(-1)} = 0$, од каде следува $f(1) = 1$. Сега, ако во (1) ставиме

$x = f(t), y = z = 1$, добиваме

$$\begin{aligned} f(t)f(1) + f(1) + 1 &= f(f(f(t)) + f(1) + f(1)), \\ f(t) + 2 &= f(t+2), \end{aligned}$$

за секој рационален број t . Бидејќи $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, со индукција се добива дека $f(n) = n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и како $f(-z) = -f(z)$, за секој $z \in \mathbb{Q}$, добиваме дека $f(m) = m$, за секој $m \in \mathbb{Z}$. Понатаму, за $x = 0$, $y = \frac{p}{q}, z = q$ имаме $\frac{p}{q}f(q) + q = f(f(\frac{p}{q})q + f(q))$, т.е.

$$p + q = f(f(\frac{p}{q})q + q),$$

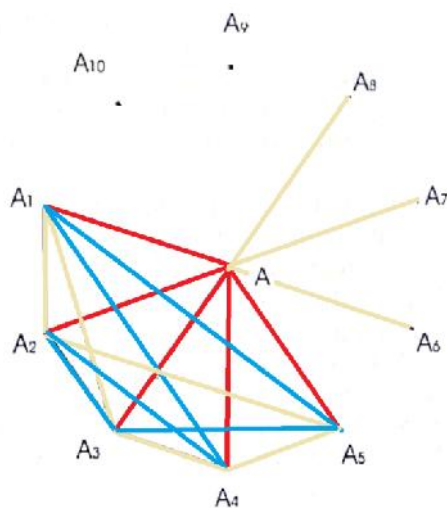
па затоа $p + q = f(p + q) = f(f(f(\frac{p}{q})q + q)) = f(\frac{p}{q}q + q)$, од каде наоѓаме

$f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$, т.е. единствено решение на дадената равенка е $f(x) = x$.

5. Во рамнината се дадени 11 точки такви што никои три од нив не се колинеарни. Сите парови од дадените точки се поврзани со отсечки и секоја од тие отсечки е обоена во една од трите бои: црвена, жолта и сина. Докажи дека меѓу дадените точки постојат три точки кои се темиња на триаголник таков што сите негови страни се обоени во иста боја или сите негови страни се обоени со различни бои.

Решение. Ако од некоја точка се повлечени најмалку 6 отсечки обоени со иста боја, на пример црвена, тогаш отсечките кои ги поврзуваат овие шест точки мора да се обоени со една од преостанатите две бои, бидејќи во спротивно ќе постои триаголник кај кој сите страни се обоени во црвена боја. Според принципот на Дирихле од едната нив кон други пет точки се повлечени барем три отсечки кои се обоени со иста боја, на пример жолта. Сега, за да нема триаголник чии страни се обоени со жолта или црвена боја мора отсечките кои ги поврзуваат вторите крајни точки на овие три жолти отсечки да се обоени со сина боја. Но, тоа значи дека имаме триаголник чии страни се обоени со сина боја.

Нека од некоја точка се повлечени точно 5 отсечки кои се обоени со иста боја, на пример црвена. Тогаш отсечките кои ги поврзуваат овие пет точки мора да се обоени во другите две бои. Нека од некоја од овие пет точки излегуваат три отсечки кои се обоени во иста боја, на пример жолта, тогаш за да нема триаголник чии страни се обоени со жолта боја мора отсечките кои ги поврзуваат вторите крајни точки на овие три жолти отсечки да се обоени со сина боја. Но, тоа значи дека имаме триаголник чии страни се обоени со сина боја. Нека од секоја од овие пет точки не излегуваат три отсечки кои се обоени во иста боја. Бидејќи имаме по 4 отсечки, добиваме дека од секоја точка излегуваат по 2 жолти и по 2 сини отсечки. Без ограничување на општоста можеме да почнеме да боиме од точката A_1 и притоа A_1A_2 и A_1A_3 се жолти, а A_1A_4 и A_1A_5 се сини. Понатаму, за да нема истообен триаголник мора A_2A_3 да е сина, а A_4A_5 да е жолта.



Сега, A_2A_5 е жолта, па за да нема истобоен триаголник мора да е A_2A_4 сина. Понатаму, за да нема истобоен триаголник мора да е A_3A_4 жолта и A_3A_5 да е сина (види цртеж). Јасно, отсечките кои ја поврзуваат точката A со точките $A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$ мора да се жолти и сини, па од принципот на Дирихле следува дека постојат три кои се обоени со иста боја. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се точките A_6, A_7, A_8 и нека отсечките се жолти. Понатаму, $A_1A_6, A_1A_7, A_1A_8, A_2A_6, A_2A_7, A_2A_8, A_3A_6, A_3A_7, A_3A_8, A_4A_6, A_4A_7, A_4A_8, A_5A_6, A_5A_7, A_5A_8$ не смее да бидат сини, бидејќи ќе имаме триаголник со разнобојни страни. Имаме 15 отсечки и две можни бои, при што од секоја од точките A_6, A_7, A_8 може да излегуваат најмногу по две жолти отсечки (во спротивно ќе имаме истобоен триаголник). Јасно, овие отсечки може да поврзат само две точки кои се крајни на сина отсечка, па како секоја од точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 е крајна на две сини отсечки, ќе имаме сина отсечка кај која едниот крај е поврзан со жолта, а другиот со црвена отсечка, т.е. добиваме разнобоен триаголник. Случајот кога отсечките кои ја поврзуваат точката A со точките A_6, A_7, A_8 се сини се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Нека од секоја точка се повлечени најмногу 4 отсечки со иста боја. Секоја точка се поврзува со десет точки и во три бои, па од принципот на Дирихле следува дека од секоја точка мора да има најмалку 4 отсечки обоени со иста боја и мора да има најмалку три други отсечки кои се обоени со иста боја. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точката A со точките A_1, A_2, A_3, A_4 е поврзана со отсечки обоени со црвена боја. Сега за да немаме еднобоен триаголник отсечките кои ги поврзуваат точките A_1, A_2, A_3, A_4 мора да се во другите две бои. Аналогно како во претходните разгледувања заклучуваме дека меѓу отсечките кои ги поврзуваат точките A_1, A_2, A_3, A_4 нема три кои се обоени со иста боја и кои излегуваат од исто теме. Нека отсечките A_1A_2 и A_1A_3 се жолти и A_1A_4 е сина. Сега за да немаме истобоен триаголник мора A_2A_3 да е сина. Јасно, отсечките A_2A_4 и A_3A_4 не може да се сини, т.е. двете се жолти или се разнобојни, при што без ограничување на општоста можеме да земеме дека A_2A_4 е сина, а

A_3A_4 е жолта. Понатаму, нека точката A со точките A_5, A_6, A_7 е поврзана со отсечки со жолта боја. Јасно, за да немаме разнобоен триаголник отсечките кои ги поврзуваат точките A_5, A_6, A_7 со точките A_1, A_2, A_3, A_4 мора да се обоени во црвена или жолта боја.

Нека отсечките A_3A_4 и A_2A_4 се жолти (цртеж десно). Тогаш само две отсечки од отсечките кои ги поврзуваат точките A_1, A_2, A_3, A_4 со точките A_5, A_6, A_7 може да се жолти и без ограничување на општоста можеме да земеме дека A_1A_7 и A_4A_7 се жолти. Тогаш A_3A_6 и A_3A_7 се црвени и без разлика во која боја е обоена отсечката A_6A_7 имаме или разнобоен или еднобоен триаголник.

Нека A_2A_4 е сина, а A_3A_4 е жолта. Тогаш само две отсечки од отсечките кои ги поврзуваат точките A_1, A_2, A_3, A_4 со точките A_5, A_6, A_7 може да се жолти и без ограничување на општоста можеме да земеме дека A_1A_7 и A_4A_7 се жолти. Тогаш A_3A_6 и A_3A_7 се црвени и без разлика во која боја е обоена отсечката A_6A_7 имаме или разнобоен или еднобоен триаголник. Аналогно се разгледува случајот кога точката A со точките A_5, A_6, A_7 е поврзана со отсечки со сина боја. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

