Републички натпревар 2005

I година

1. Должините на страните на еден триаголник се прости броеви. Докажи дека неговата плоштина не може да биде природен број.

Решение. Од Хероновата формула за плоштина на триаголник имаме

$$P^2 = s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\,, \qquad (1)$$

каде a,b,c се страните на триаголникот, а $s=\frac{a+b+c}{2}$. Нека a,b,c се прости броеви. Да претпоставиме дека и $P\in\mathbb{N}$. Означуваме со $L=a+b+c$ и тогаш равенството (1) преминува во

$$16P^2 = L\cdot(L-2a)\cdot(L-2b)\cdot(L-2c)\,. \qquad (2)$$

Левата страна на равенството (2) е парен број, значи и десната страна е исто така парен број, од каде заклучуваме дека L е парен број. Настануваат два случаи:

1^0 Сите a,b,c се парни броеви. Од тоа што a,b,c се прости броеви, следи дека $a=b=c=2 \Rightarrow P=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$, што противречи на претпоставката.

2^0 Еден од a,b,c е парен, а останатите два се непарни броеви. Без губење од општоста може да земеме дека a е парен број, а b и c се непарни броеви. Тогаш,

$$a=2 \text{ и } b,c\geq 3\,. \qquad (3)$$

Ако $b\neq c$, нека $b<c$, тогаш $c-b\geq 2$ т.е. $c\geq b+2=b+a$, што претставува противрешност со неравенството меѓу страните во триаголник.

Значи, $b=c$, па тогаш $L=a+b+c=2+2b$ и (2) преминува во

$$16P^2=(2+2b)\cdot(2+2b-4)\cdot(2+2b-2b)\cdot(2+2b-2b)$$

$$16P^2=16\cdot(1+b)\cdot(b-1)$$

$$P^2=b^2-1$$

$$1=(b-P)\cdot(b+P)\,, \qquad (4)$$

но бидејќи $b+P\geq 3$, заради (3), следи дека равенството (4) не е можно.

Значи, ако a,b,c се прости броеви, не може $P\in\mathbb{N}$, што требаше да се докаже.

2. Нека за рационалните броеви a,b,c исполнети се условите

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\,,\ abc\neq 0 \text{ и } a+b+c\neq 0\,.$$

Докажи дека

а) $a+b=0$ или $a+c=0$ или $b+c=0$,

б) $\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{b^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. а) Од равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, заради $abc \neq 0$ и $a+b+c \neq 0$ со трансформации се добива

$$(a+b+c)\cdot(bc+ac+ab)=abc \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+c)=0,$$

значи, $a+b=0$ или $a+c=0$ или $b+c=0$, што требаше да се докаже.

б) Без губење од општоста може да земеме дека $a+b=0$, тогаш $b=-a$, па и за секој n природен број важи $b^{2n-1}=(-a)^{2n-1}=-a^{2n-1}$, од каде со замена во равенството

$$\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{b^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}} \tag{1}$$

се добива

$$\frac{1}{a^{2n-1}}-\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}-a^{2n-1}+c^{2n-1}}, \text{ т.е. } \frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{+c^{2n-1}},$$

што претставува точен исказ за секој $c \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ и секој n природен број, со што се покажува дека равенството (1) важи.

3. Докажи дека за секоја точка P од страната AB на триаголникот ABC важи

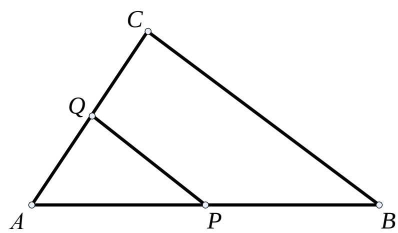
$$\overline{PC}\cdot\overline{AB}<\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{AC}.$$

Решение. Нека P е произволна точка од страната AB на триаголникот ABC и нека Q е точка од страната AC така што $PQ \parallel BC$. Од сличноста $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ имаме $\overline{PQ}:\overline{BC}=\overline{PA}:\overline{AB}$, т.е.

$$\overline{PQ}\cdot\overline{AB}=\overline{PA}\cdot\overline{BC}. \tag{1}$$

Од $PQ \parallel BC$ имаме $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{PB}$, т.е.

$$\overline{AB}\cdot\overline{CQ}=\overline{PB}\cdot\overline{AC}. \tag{2}$$



Со собирање на равенствата (1) и (2) добиваме

$$\overline{AB}\cdot(\overline{PQ}+\overline{CQ})=\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{AC} \tag{3}$$

Од неравенство меѓу страните на триаголникот PQC имаме

$$\overline{PQ}+\overline{CQ}>\overline{PC} \tag{4}$$

Конечно, од (3) и (4) се добива

$$\overline{AB}\cdot\overline{PC}\overset{(4)}{<}\overline{AB}\cdot(\overline{PQ}+\overline{CQ})\overset{(3)}{=}\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{AC},$$

што требаше да се докаже.

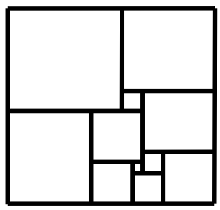
4. На табла се напишани броевите 1 и 2. Се дозволува допишување на нови броеви на следниот начин: Ако на таблата се наоѓаат броевите a и b на различни места, тогаш може да се допише и бројот $ab+a+b$. Дали може на тој начин да се добие бројот 2005?

Решение. Ќе докажеме дека сите броеви на таблата се од облик 2^n3^m-1, каде што $n,m\in\mathbb{N}$. Јасно е дека такви се $1=2^13^0-1$, $2=2^03^1-1$ и следниот добиен број $1\cdot2+1+2=5=2^1\cdot3^1-1$. Ако замеме два броеви од таблата, $2^{n_1}3^{m_1}-1$ и $2^{n_2}3^{m_2}-1$, тогаш новодобиениот број ќе биде

$$\begin{aligned}(2^{n_1}3^{m_1}-1)(2^{n_2}3^{m_2}-1)+2^{n_1}3^{m_1}-1+2^{n_2}3^{m_2}-1=\\ =2^{n_1+n_2}3^{m_1+m_2}-\cancel{2^{n_1}3^{m_1}}-\cancel{2^{n_2}3^{m_2}}+\cancel{1}+\cancel{2^{n_1}3^{m_1}}-\cancel{1}+\cancel{2^{n_2}3^{m_2}}-1\\ =2^{n_1+n_2}3^{m_1+m_2}-1=2^k3^s-1\end{aligned}$$

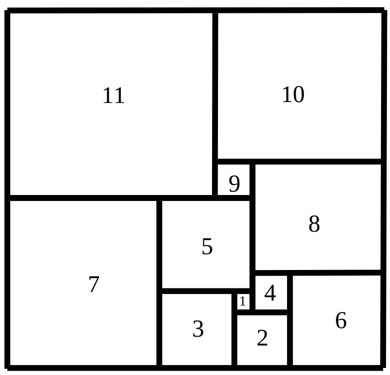
Бидејќи $2005+1=2006=2\cdot17\cdot59\neq2^n\cdot3^m$, значи дека бројот 2005 не е од облик 2^n3^m-1 па на таблата не може да се добие тој број.

II година



1. Нацртаниот правоаголник на цртежот е поделен на 11 квадрати со различни страни. Најмалиот квадрат има страна 9. Кои се димензиите на правоаголникот?

Решение. Квадратот означен со бројот 1 има должина (т.е. должина на страна) 9. Нека квадратот бр. 2 има должина x. Тогаш квадратот бр. 3 има должина $x+9$, квадратот бр. 4 има должина $x-9$, квадратот бр. 5 има должина $x+18$, квадратот бр. 6 има должина $2x-9$, квадратот бр. 7 има должина $2x+27$, квадратот бр. 8 има должина $3x-18$.



Ако страната на квадратот бр. 9 е y, тогаш $y+(x+18)+9=(3x-18)+(x-9)$, од каде $y=3x-54$. Па, квадратот бр. 10 има страна $6x-72$, а квадратот бр. 11 страна $9x-126$.

Горната страна на дадениот правоаголник е збир на страните на квадратите бр. 10 и 11, т.е. има должина

$$(6x-72)+(9x-126)=15x-198,$$

а неговата долна страна е збир на страните на квадратите бр. 7, 3, 2 и 6, т.е. има должина

$$(2x+27)+(x+9)+x+(2x-9)=6x+27.$$

Изедначувајќи ги добиените изрази добиваме $x=25$. Затоа страните на квадратите означени со броевите од 1 до 11 се 9, 25, 34, 16, 43, 41, 77, 57, 21, 78, 99, соодветно. Па, должината на дадениот правоаголник е 177, а ширината 176.

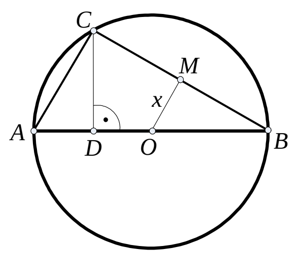
2. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} ax = |y-z| + y \\ ay = |z-x| + z \\ az = |x-y| + x \end{cases},$$

ако $a \in \mathbb{R},\ a > 0$.

Решение. Ќе докажеме дека $x = y = z$. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека постои решение (x,y,z) за кое без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $z > y$. Од првата равенка добиваме $ax = z - y + y = z$. Ако замениме во втората равенка добиваме $a(y-x) = |z-x| \geq 0$, од каде заради условот $a > 0$ добиваме $y \geq x$. Тогаш од третата равенка добиваме $az = y - x + x = y$. Ако замениме во првата равенка добиваме $x \geq z$. Според тоа, $z > y \geq x \geq z$, што не е можно. Значи, решенијата на системот го задоволуваат условот $x = y = z$. Според тоа, за $a = 1$ решение на системот се сите тројките од облик $(t,t,t),\ t \in \mathbb{R}$, а за $a \neq 1$ решение на системот е тројката $(0,0,0)$.

3. Дадена е кружница со центар *O* и дијаметар *AB*. Точката *C* е избрана на кружницата така што $\overline{DB} = 3\overline{OM}$, каде што *D* е проекција на *C* врз дијаметарот *AB*, а *M* е проекција на *O* врз *BC*. Определи го $\measuredangle ABC$.



Решение. Нека $\overline{OM} = x$ и $\overline{OB} = r$. Според условот $\overline{DB} = 3\overline{OM} = 3x$, па $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB} = 2r - 3x$. Од тоа што *OM* е средна линија во $\triangle ABC$ имаме $\overline{AC} = 2\overline{OM} = 2x$. Триаголниците *OBM* и *ACD* се слични, па $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OM}}$ т.е. $\frac{2x}{2r-3x} = \frac{r}{x}$, од каде што $2x^2 + 3rx - 2r^2 = 0$. Решенија на оваа квадратна равенка се: $x_{1/2} = \pm\frac{r}{2}$, од каде $r = 2x$.

Значи, $\overline{AC} = \overline{AO} = \overline{OC}$, па аголот CAB е 60°. Следува бараниот агол е 30°.

4. Нека k е еден од количниците на корените на квадратната равенка $px^2 - qx + q = 0$, каде $p, q > 0$. Изрази ги преку k (не преку p и q) корените на равенката $\sqrt{p}x^2 - \sqrt{q}x + \sqrt{p} = 0$.

Решение. Ако a и b се корени на равенката $px^2 - qx + q = 0$, тогаш од условот на задачата имаме $\frac{a}{b} = k$, а според виетовите правила имаме $a + b = \frac{q}{p}$, $ab = \frac{q}{p}$. Бидејќи p и q се позитивни реални броеви, од втората равенка добиваме дека a и b се со ист знак. Од првата равенка добиваме дека a и b се позитивни. Според тоа, ако ја коренуваме втората равенка, добиваме $\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{q}{p}}$. Ако ги поделиме равенките $a+b=\frac{q}{p}$ со $\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{q}{p}}$ (лева со лева, десна со десна страна), добиваме $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{q}{p}}$. Ако го искористиме условот $\frac{a}{b}=k$, добиваме $\sqrt{k}+\sqrt{\frac{1}{k}}=\sqrt{\frac{q}{p}}$, т.е. $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$.

Ако последната добиена равенка ја помножиме со $\sqrt{k}\sqrt{p}$, добиваме

$$\sqrt{p}(\sqrt{k})^2-\sqrt{q}\sqrt{k}+\sqrt{p}=0.$$

Значи, $\sqrt{k}$ е корен на равенката

$$\sqrt{p}x^2-\sqrt{q}x+\sqrt{p}=0 \qquad (1)$$

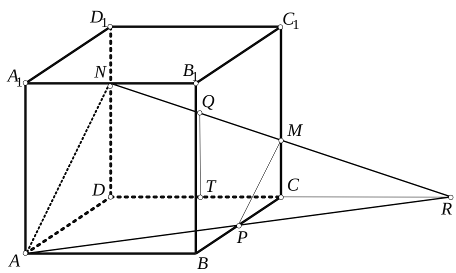
Од тоа што $\sqrt{k}$ е корен на равенката (1) и равенството $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$, добиваме дека $\frac{1}{\sqrt{k}}$ е вториот корен на равенката (1).

Ако a_1, b_1 се корени на равенката (1), тогаш $a_1=\sqrt{k}$ и $b_1=\frac{1}{\sqrt{k}}$.

III година

1. На коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ избрани се точките P и Q, каде P е средина на работ BC, а Q е пресекот на дијагоналите во квадратот CC_1DD_1. Рамнината APQ ја дели коцката на два дела. Најди го односот на волумените на добиените делови од коцката?

Решение. Да ја означиме страната на коцката со a. Нека T е подножјето на нормалата спуштена од точката Q врз работ CD, нека пресечните точки на рамнината APQ со рабовите DD_1 и CC_1 се N и M соодветно, а пресечната точка со правата CD е точката R. Од условот на задачата важат следниве равенства $\overline{BP}=\overline{PC}=\frac{a}{2}$ и $\overline{QT}=\frac{a}{2}$.



Притоа, $\triangle ARD \sim \triangle PRC$ од каде што се добива $\overline{CR}:\overline{DR}=\overline{CP}:\overline{DA}=\frac{1}{2}$. Тогаш $\overline{CD}=\overline{CR}=a$. Исто и $\Delta CMR \sim \Delta DNR$ од каде $\overline{CM}:\overline{DN}=\overline{CR}:\overline{DR}=\frac{1}{2}$, па имаме $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{DN}$. QT е средна линија во трапезот $DCMN$ и важи

$$\overline{DN}+\overline{CM}=2\overline{QT}=a \text{ или } \overline{DN}+\frac{\overline{DN}}{2}=a,$$

од каде што добиваме $\overline{DN}=\frac{2}{3}a$ и $\overline{CM}=\frac{1}{3}a$.

Рамнината APQ ја дели коцката на два дела од кои едниот е пресечената пирамида $ADNPCM$, со висина страната на коцката и основи правоаголни триаголници PCM и AND. За волуменот на пресечената пирамида, со помош на двете пирамиди $ANDR$ и $PCMR$ добиваме:

$$V_1=V_{ADNR}-V_{PCMR}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DN}}{2}\cdot\frac{\overline{DR}}{2}-\frac{\overline{CP}\cdot\overline{CM}}{2}\cdot\frac{\overline{CR}}{2}=\frac{7a^3}{36}$$

За волуменот на преостанатиот дел важи $V_2=a^3-V_1=\frac{29a^3}{36}$. Бараниот однос на волумените е $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{29}$.

2. Нека $a_1,a_2,....,a_n \in \mathbb{R}$ и нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција дефинирана со

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\frac{\cos(a_3+x)}{2^2}+...+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$

Докажи дека, ако $f(x_1)=f(x_2)=0$ тогаш постои $m\in\mathbb{Z}$, така што $x_1-x_2=m\pi$.

Решение. Користејќи $\cos(a_i+x)=\cos a_i\cos x-\sin a_i\sin x$, функцијата ќе ја трансформираме во облик

$$f(x)=\cos x(\cos a_1+\frac{\cos a_2}{2}+....+\frac{\cos a_n}{2^{n-1}})-\sin x(\sin a_1+\frac{\sin a_2}{2}+...+\frac{\sin a_n}{2^{n-1}})$$

или уште повеќе $f(x)=A\cos x-B\sin x$, каде

$$A=\cos a_1+\frac{\cos a_2}{2}+....+\frac{\cos a_n}{2^{n-1}} \text{ и } B=\sin a_1+\frac{\sin a_2}{2}+...+\frac{\sin a_n}{2^{n-1}}.$$

Ќе покажеме дека $A^2+B^2\neq 0$.

Нека $A^2+B^2=0$. Тогаш сигурно $A=B=0$, а за функцијата би имале $f(x)=0$ на целото множество реални броеви. Специјално за $x=-a_1$ добиваме

$$0=f(-a_1)=\cos 0+\frac{\cos(a_2-a_1)}{2}+....+\frac{\cos(a_n-a_1)}{2^{n-1}},$$

односно

$$\frac{\cos(a_2-a_1)}{2}+....+\frac{\cos(a_n-a_1)}{2^{n-1}}=-1,$$

израз за кој важи

$$|-1|=1=|\frac{\cos(a_2-a_1)}{2}+....+\frac{\cos(a_n-a_1)}{2^{n-1}}|\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}==1-\frac{1}{2^{n-1}}<1$$

што е контрадикција.

Тогаш мора $A^2+B^2 \neq 0$ и функцијата може да ја запишеме во облик

$$f(x)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right).$$

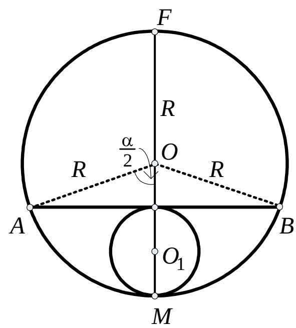
Ќе избереме агол φ, така што $\sin\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ и $\cos\varphi=-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, јасно можно е затоа што $-1\leq\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\leq 1$, $-1\leq\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}\leq 1$ и $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.

Тогаш $f(x)=\sqrt{A^2+B^2}(\sin\varphi\cos x+\cos\varphi\sin x)=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\varphi+x)$. Ако сега $f(x_1)=f(x_2)=0$, ќе добиеме $\sin(\varphi+x_1)=0$ и $\sin(\varphi+x_2)=0$, од каде мора $\varphi+x_1=k\pi$ и $\varphi+x_2=j\pi$, за $k,j\in\mathbb{Z}$. Конечно $x_1-x_2=(k-j)\pi=m\pi$, каде $m=k-j\in\mathbb{Z}$, што требаше да се докаже.

3. Во кружница со радиус R, определи го централниот агол на кој му соодветствува кружен отсечок со следново својство: тетивата на отсечокот е еднаква на периметарот на кружницата со најголем радиус која е впишана во него.

Решение. Нека AMB е бараниот кружен отсечок и нека $\measuredangle AOB=\alpha$. Јасно е дека $\measuredangle AOM=\frac{\alpha}{2}$. Од степен на точка во однос на кружница имаме

$$\overline{MN}\cdot\overline{NF}=\overline{AN}\cdot\overline{NB}. \qquad (1)$$



Нека r е радиусот на кружницата која што е впишана во отсечокот. Тогаш $l=2r\pi$, $\overline{AN}=\overline{NB}=\pi r$ и $\overline{MN}=2r$, $\overline{NF}=2R-2r$. Бидејќи $\frac{\pi r}{R}=\sin\frac{\alpha}{2}$, добиваме $R=\frac{\pi r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Според тоа

$$\overline{NF}=2\frac{\pi r}{\sin\frac{\alpha}{2}}-2r=2r\left(\frac{\pi r}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1\right).$$

Ако замениме во (1), добиваме

$$\pi^2r^2=4r^2\left(\frac{\pi r}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1\right) \text{, т.е. } \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{4\pi}{4+\pi^2}.$$

Конечно, $\alpha=2\arcsin\frac{4\pi}{4+\pi^2}$.

4. Нека $f(x)$ е полином со целобројни коефициенти и $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$. Докажи дека $f(\sqrt{2}-\sqrt{3})=0$.

Решение. Ако воведеме ознака $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, тогаш $x^2=5+2\sqrt{6}$, т.е. $x^2-5=2\sqrt{6}$. Ако последното равенство го квадрираме, добиваме

$$x^4-10x^2+25=24.$$

Полином со најнизок степен и со целобројни коефициенти за кој што $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ е негова нула е $g(x)=x^4-10x^2+1$. Ако полиномот со целобројни коефициенти го запишеме во облик

$$f(x)=(x^4-10x^2+1)p(x)+ax^3+bx^2+cx+d\ ,$$

каде a,b,c,d се цели броеви, тогаш од равенството $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$, добиваме

$$a(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3+b(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+c(\sqrt{2}+\sqrt{3})+d=0\ .$$

Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$(9a+c)\sqrt{3}+(11a+c)\sqrt{2}+2b\sqrt{6}+5b+d=0\,,$$

од каде што добиваме дека $9a+c=0$, $11a+c=0$, $2b=0$ и $5b+d=0$, т.е. $a=b=c=d=0$. Според тоа $f(x)=(x^4-10x^2+1)p(x)$, каде $p=p(x)$ е со целобројни коефициенти. Од тука е јасно дека $f(\sqrt{3}-\sqrt{2})=0$.

Забелешка. Имаме

$$x^4-10x^2+1=(\ x-\sqrt{3}-\sqrt{2}\ )(\ x-\sqrt{3}+\sqrt{2}\ )(\ x+\sqrt{3}-\sqrt{2}\ )(\ x+\sqrt{3}+\sqrt{2}\ )\ .$$

IV година

1. Ако синусите на аглите на еден триаголник образуваат аритметичка прогресија тогаш и котангенсите од половините на аглите образуваат аритметичка прогресија. Докажи!

Решение. Нека x, y, z се аглите на триаголникот. Тогаш $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ образуваат аритметичка прогресија односно $\sin y=\frac{\sin x+\sin z}{2}$. Оттука добиваме

$$2\sin(\pi-(x+z))=2\sin\tfrac{x+z}{2}\cos\tfrac{x-z}{2}\ ,$$

$$\sin(x+z)=\sin\tfrac{x+z}{2}\cos\tfrac{x-z}{2}\ ,$$

$$2\sin\tfrac{x+z}{2}\cos\tfrac{x+z}{2}=\sin\tfrac{x+z}{2}\cos\tfrac{x-z}{2}\ ,$$

$$\sin\tfrac{x+z}{2}(2\cos\tfrac{x+z}{2}-\cos\tfrac{x-z}{2})=0\ .$$

Бидејќи $\sin\frac{x+z}{2}\neq 0$ добиваме дека

$$\cos\tfrac{x-z}{2}=2\cos\tfrac{x+z}{2} \tag{1}$$

Од $y=\pi-(x+z)$ следува $\frac{y}{y}=\frac{\pi}{2}-\frac{x+z}{2}$. Значи

$$\operatorname{ctg}\tfrac{y}{2}=\operatorname{tg}\tfrac{x+z}{2} \tag{2}$$

Сега имаме:

$$\operatorname{ctg}\tfrac{x}{2}+\operatorname{ctg}\tfrac{z}{2}=\frac{\sin\frac{x+z}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{z}{2}}=\frac{\sin\frac{x+z}{2}}{\frac{1}{2}(\cos\frac{x-z}{2}-\cos\frac{x+z}{2})}\overset{(1)}{=}\frac{2\sin\frac{x+z}{2}}{\cos\frac{x+z}{2}}=2\operatorname{tg}\tfrac{x+z}{2}\overset{(2)}{=}2\operatorname{ctg}\tfrac{y}{2}\ .$$

2. Најди ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ такви што $f(1)=\frac{5}{2}$ и важи

$$f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y),\text{ за секои } x,y\in\mathbb{Z}.$$

Решение. Ако $x=y=0$ имаме $f(0)^2=2f(0)$, а оттука $f(0)=0$ или $f(0)=2$. Нека $f(0)=0$. Ако $y=1$ имаме $\frac{5}{2}f(x)=f(x+1)+f(x-1)$ односно

$$f(x+1)=\frac{5}{2}f(x)-f(x-1).$$

Тогаш $f(2)=\frac{25}{4}$, $f(3)=\frac{105}{8}$, $f(4)=\frac{425}{16}$. Но, од $f(2)^2=f(4)+f(0)$ следува дека $f(4)=\frac{625}{16}$. Значи $f(0)\neq 0$.

Нека $f(0)=2$. Бидејќи $f(x)f(-y)=f(x-y)+f(x+y)=f(x)f(y)$, за сите $x,y\in\mathbb{Z}$, тогаш и за $x=1$ равенството важи. Но бидејќи $f(1)\neq 0$ добиваме дека $f(-y)=f(y)$, за секој $y\in\mathbb{Z}$, односно функцијата е парна. Важи $f(0)=2$, $f(1)=\frac{5}{2}$, $f(2)=\frac{17}{4}$, $f(3)=\frac{65}{8}$ ... . Затоа, со индукција ќе докажеме дека ако x е позитивен цел број тогаш $f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$ е единствено решение (единствено бидејќи секоја функционална вредност зависи само од претходните две вредности, односно $f(x+1)=\frac{5}{2}f(x)-f(x-1)$). Јасно е дека за $x=1$ тврдењето важи. Нека за секој $t<x, t\in\mathbb{N}$ тврдењето важи. Тогаш имаме

$$f(t+1)=\frac{5}{2}f(t)-f(t+1)=\frac{5}{2}\frac{2^{2t}+1}{2^t}-\frac{2^{2(t-1)}+1}{2^{t-1}}=\frac{2^{2(t+1)}+1}{2^{t+1}}.$$

Од $f(0)=\frac{2^{2\cdot 0}+1}{2^0}=2$ и од тоа што f е парна функција добиваме дека $f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$ е единствена функција што го задоволува равенството за секој цел број x. Обратното е јасно. односно лесно се проверува дека ако $f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$, тогаш таа го задоволува даденото равенство.

3. Реши ја равенката $x!+y!+z!=u!$ во $\mathbb{N}$.

Решение. Нека четворката (x,y,z,u) е решение на равенката. Нека $v=\max\{x,y,z\}$ тогаш $1\le v<u$ и $uv!\le u(u-1)!=u!=x!+y!+z!\le 3v!$. Значи $u\le 3$. За $u=3$ ја добиваме равенката $3!=x!+y!+z!$ чиешто решение е $x=y=z=2$. За $u=2$, нема решение бидејќи $x!+y!+z!\ge 3>2=2!$. Слично, равенката нема решение кога u=1. Значи единствено решение е $x=y=z=2$, $u=3$.

4. Докажи дека за секои реални броеви a,b,c,d важи неравенството

$$\max\{a^2-b,b^2-c,c^2-d,d^2-a\}\ge\max\{a^2-a,b^2-b,c^2-c,d^2-d\}$$

Решение. Нека

$$M_1 = \max\{a^2 - a, b^2 - b, c^2 - c, d^2 - d\} \text{ и } M_2 = \max\{a^2 - b, b^2 - c, c^2 - d, d^2 - a\}.$$

Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $M_1 > M_2$. Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека $M_1 = a^2 - a$. Тогаш важи $a^2 - a \geq a^2 - b$, од каде се добива дека $b \geq a$. Натаму, $a^2 - a \geq b^2 - c \geq a^2 - c$, од каде се добива $c \geq a$. Од $a^2 - a \geq c^2 - d \geq a^2 - d$, добиваме и дека $d \geq a$. Оттука $d^2 - a \geq a^2 - a$, што е во контрадикција со претпоставката $M_1 > M_2$.