

Ристо Малчески
Скопје

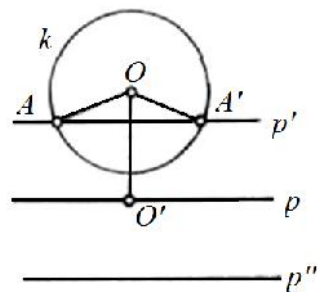
РЕШАВАМЕ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ (ТРЕТ ДЕЛ)

Во [4] е дадена постапката за решавање конструктивни задачи и се разгледани четири примери, а во [5] се решени повеќе конструктивни задачи, дел од кои се однесуваат и на конструкција на правоаголен триаголник. Во продолжение ќе разгледаме уште неколку задачи, дел од кои се поврзани со конструкцијата на пропорционални отсечки и конструкција на триаголник. .

1. Определи точка A која од дадена права p и од дадена точка O е на исто растојание еднакво на a .

Решение. *Анализа.* Сите точки кои од дадена права p се оддалечени за a , се наоѓаат на две прави p' и p'' , паралелни со дадената права p , кои од неа се оддалечени за a . Сите точки кои од дадена точка O се оддалечени за a , се наоѓаат на кружница $k(O, a)$. Според тоа, бараната точка се наоѓа во пресекот на правите p' и p'' со кружницата $k(O, a)$.

Конструкција. Конструираме прави p' и p'' паралелни на дадената права p , кои се на растојание a од правата p . Потоа ја конструираме кружницата $k(O, a)$, цртеж десно. Ги определуваме пресечните точки A и A' на правите p' и p'' со кружницата $k(O, a)$, и тоа се решенијата на задачата.



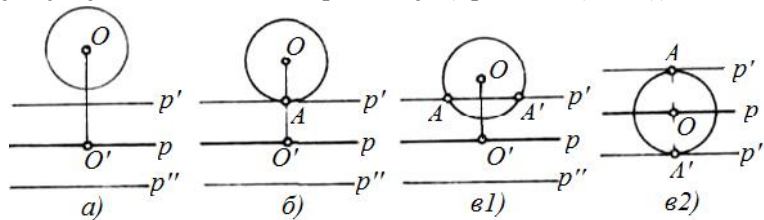
Доказ. Точката A се наоѓа во пресекот на една од правите p' и p'' , на кои сите точки се оддалечени од правата p за a , со кружницата $k(O, a)$, на која сите точки се оддалечени од точката O за a . Затоа точката A е оддалечена и од p и од O за a .

Дискусија. Ако се земем предвид положбата на точката O во однос на правата p , можни се следниве случаи:

- а) Оддалеченоста на точката O од правата p е поголема од $2a$ и во овој случај задачата нема решение (цртеж а)).

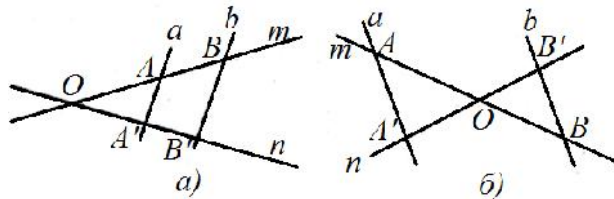
б) Оддалеченоста на точката O од правата p е еднаква на $2a$ и во овој случај задачата има едно решение (цртеж б)).

в) Оддалеченоста на точката O од правата p е помала од $2a$ и во овој случај задачата има две решенија (цртежи в1) и в2)).



Во следните неколку задачи ќе се задржиме на конструкцијата на пропорционални отсечки. Да се потсетиме: За отсечките a и b велíme дека се *пропорционални* со отсечките c и d ако важи $a:b=c:d$. Притоа велíme дека секоја од дадените четири отсечки е *четврта пропорционала* на преостанатите три отсечки. Понатаму, ако $a=d$, т.е. ако важи $a:b=c:a$, тогаш велíme дека отсечката a е *геометриска средина* на отсечките b и c . Понатаму, од сличноста на соодветните триаголници следува точноста на следново тврдење.

Нека правите m и n се сечат во точката O и нека паралелните прави a и b ги сечат во точките A и A' , односно во точките B и B' (види цртеж). Тогаш важи



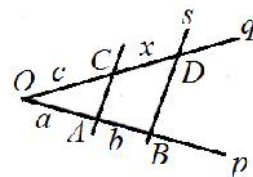
$$\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{OB}:\overline{OB'}, \quad \overline{OA}:\overline{AA'}=\overline{OB}:\overline{BB'} \quad \text{и} \quad \overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OA'}:\overline{OB'}.$$

Претходно тврдење, чиј доказ го оставаме на читателот за важба ќе го искористиме за конструкција на пропорционални отсечки.

2. Конструирај ја четвртата геометриска пропорционала за дадени три отсечки a, b и c .

Решение. Четвртата геометриска пропорционала е отсечката x која ја задоволува пропорцијата $a:b=c:x$.

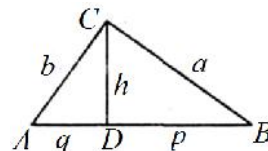
Цртаме произволен $\angle pOq$ (цртеж десно) и на кракот Op определуваме точки A и B такви што $\overline{OA}=a$ и $\overline{OB}=a+b$, т.е. $\overline{AB}=b$. Понатаму, на кракот Oq определуваме точка C



таква што $\overline{OC} = c$. Ја повлекуваме правата AC и низ точката B повлекуваме права s таква што $s \parallel AC$ и го определуваме пресекот $s \cap Oq = D$. Бидејќи $AC \parallel BD$, важи $\overline{OA} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CD}$, односно $a : b = c : \overline{CD}$, па затоа $x = \overline{CD}$. ■

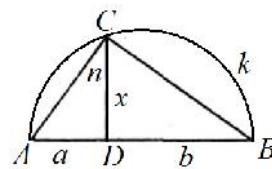
3. Дадени се отсечките a и b . Конструирај ја нивната геометриска средина x .

Решение. *Анализа.* Да го разгледаме правоаголниот $\triangle ABC$ во кој h е висината повлечена од темето на правиот агол C која хипотенузата ја дели на две отсечки $\overline{AD} = q$ и



$\overline{BD} = p$ (цртеж десно). Од сличноста на $\triangle ADC$ и $\triangle CDB$ следува $h : q = p : h$, што значи дека висината h е геометриска средина на проекциите на катетите врз хипотенузата.

Конструкција. Прв конструираме отсечка $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$, каде $\overline{AD} = a$ и $\overline{DB} = b$. Потоа над отсечката AD како над дијаметар конструираме полукружница k и во точката D конструираме нормала n на отсечката



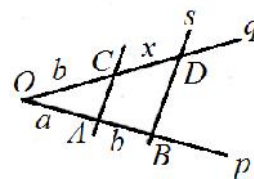
AD . Нека $C = k \cap n$. Тогаш $\overline{CD} : a = b : \overline{CD}$, па затоа $x = \overline{CD}$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Задачата има единствено решение. ■

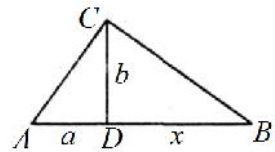
4. Дадени се отсечките a и b . Конструирај отсечка x таква што $a : b = b : x$.

Решение. *Прв начин.* Ако во задача 2 ставиме $c = b$, добиваме дека треба да ја конструираме четвртата геометриска пропорционала за отсечките a, b и b . Според задача 2, решението е дадено на цртежот десно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.



Втор начин. Пропорцијата $a : b = b : x$ е еквивалентна на пропорцијата $b : a = x : b$. Според тоа, треба да определиме отсечка x таква што за дадени отсечки a и b , отсечката b е геометриска средина на отсечките a и x .

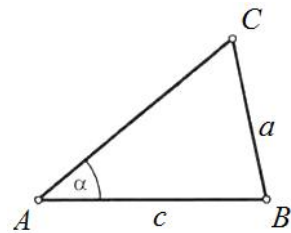
Од решението на задача 3 следува конструкцијата: конструираме правоаголен $\triangle ADC$ со катети a и b . Во точката C конструираме нормала на отсечката AC и во пресекот со правата AD ја наоѓаме точката B . Имаме



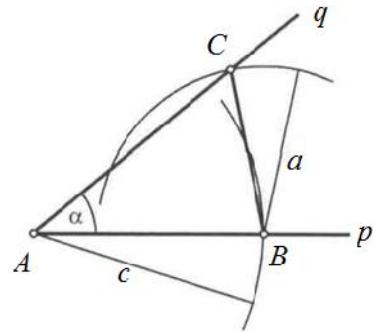
$b:a = \overline{DB}:b$, па затоа $x = \overline{DB}$. Задачата има единствено решение, а доказот следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

5. Конструирај триаголник ако се дадени аголот α и должините на страните a и c .

Решение. *Анализа.* Нека $\triangle ABC$ е бараниот триаголник (цртеж десно). Страната $\overline{AB} = c$ и аголот $\angle BAC = \alpha$ може непосредно да се конструираат. Темето C припаѓа на кракот на аголот α и на кружницата $k(B, a)$, т.е. тоа се наоѓа во нивниот пресек.



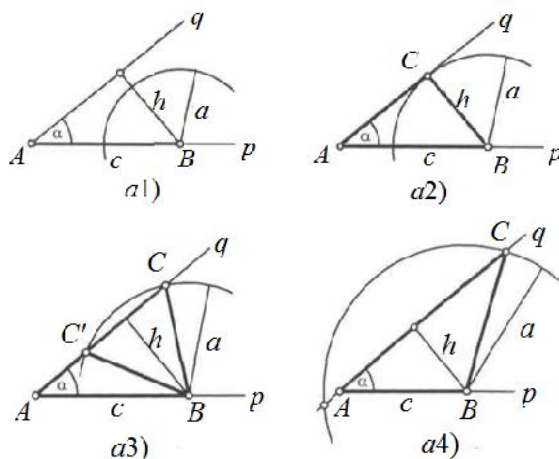
Конструкција. Конструираме $\angle pAq = \alpha$ еднаков на дадениот агол α . Потоа конструираме кружница со центар A и радиус c , чиј пресек со кракот Aq го означуваме со B . Понатаму, конструираме кружница со центар B и радиус a , чиј пресек со кракот Aq го означуваме со C (цртеж десно). Триаголникот ABC е бараниот триаголник.



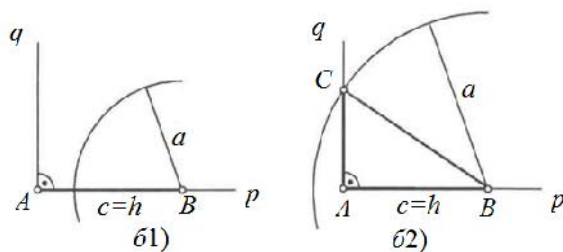
Доказ. По конструкција $\angle BAC = \alpha$ и $\overline{AB} = c$. Бидејќи C припаѓа на кружницата со центар B и радиус a , важи $\overline{BC} = a$, па затоа $\triangle ABC$ е бараниот триаголник.

Дискусија. Конструкцијата на $\angle pAq = \alpha$ и отсечката $\overline{AB} = c$ е секогаш можна и не зависи од дадениот агол α и дадената должина c . Но, конструкцијата на темето T зависи од меѓусебната положба на полуправата Aq и кружницата $k(B, a)$. Со h да го означиме растојанието од точката B до правата на која лежи кракот Aq . Во зависност од големината на аголот α , ќе разгледаме три случаи.

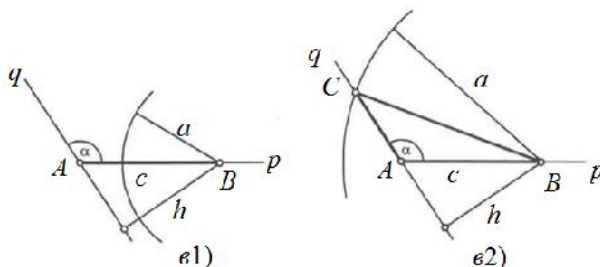
а) Ако $\alpha < 90^\circ$ и $a < h$, тогаш задачата нема решение (цртеж а1)).
Ако $\alpha < 90^\circ$ и $a = h$, тогаш задачата има единствено решение (цртеж а2)).
Ако $\alpha < 90^\circ$ и $h < a < \overline{AB}$, тогаш задачата има две решенија (цртеж а3)).
Ако $\alpha < 90^\circ$ и $a \geq c$, тогаш задачата има единствено решение (цртеж а4)).



б) Ако $\alpha = 90^\circ$, тогаш $c = h$. Ако $a \leq h$, тогаш задачата нема решение (цртеж б1)).
Ако $a > h$, тогаш задачата има единствено решение (цртеж б2)).

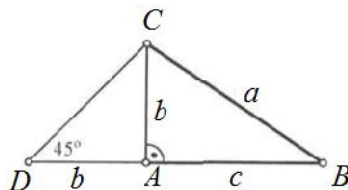


в) Ако $\alpha > 90^\circ$, тогаш $h < c$. Ако $a \leq c$, тогаш задачата нема решение (цртеж в1)).
Ако $a > c$, тогаш задачата има единствено решение (цртеж в2)). ■



6. Конструирај правоаголен триаголник за кој се дадени хипотенузата a и збирот на катетите $b + c$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека бараниот триаголник ABC е конструиран (цртеж десно). Ако страната AB ја продолжиме преку темето A до точка D таква што $\overline{DA} = b$, тогаш $\triangle CDA$ е рамнокрак правоаго-

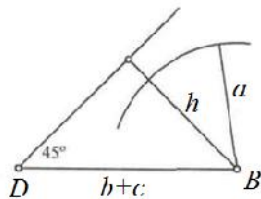


лен, т.е. $\angle ADC = 45^\circ$. За $\triangle BCD$ имаме $\angle BDC = 45^\circ$, $\overline{DB} = b + c$ и $\overline{BC} = a$, па истиот може да се конструира (види задача 5). Конечно, темето A е подножје на нормалата повлечена од темето C на страната DB .

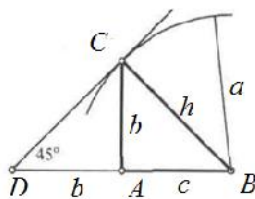
Конструкција. Како во задача 5 го конструираме $\triangle BCD$ за кој е познато $\angle BDC = 45^\circ$, $\overline{DB} = b + c$ и $\overline{BC} = a$. Потоа повлекуваме нормала од C на DB и во нејзиниот пресек со DB го наоѓаме темето A . (Темето A може да се добие и како пресек на симетралата на CD и страната DB .)

Доказ. Бидејќи $\triangle DAB$ е правоаголен, при што важи $\angle DAC = 90^\circ$ и $\angle ADC = 45^\circ$, добиваме дека тој е рамнокрак. Според тоа $\overline{AD} = \overline{AC}$. Сера, $\angle BAC = 90^\circ$, $\overline{BC} = a$ и по конструкција $\overline{DB} = b + c$, па затоа $\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{DA} + \overline{AB} = \overline{DB} = b + c$, што значи дека $\triangle ABC$ е бараниот триаголник.

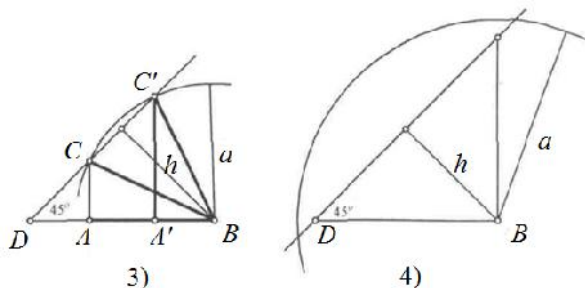
Дискусија. Бидејќи $\angle BDC = 45^\circ < 90^\circ$, го добиваме случајот а) од задача 5. Ако $a < h$, тогаш задачата нема решение (цртеж 1)). Ако $a = h$, тогаш задачата има единствено решение (цртеж 2). Ако $h < a < b + c$, тогаш задачата има две решенија $\triangle ABC$ и $\triangle A'BC'$ (цртеж 3)). Ако $a \geq b + c$, задача нема решение, бидејќи секоја страна на триаголникот е помала од збирот на другите две (цртеж 4)). ■



1)

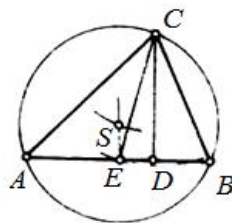


2)



7. Конструирај триаголник ако се дадени висината и тежишната линија кои соодветствуваат на иста страна и радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. Конструкција. Нека се дадени h_c, t_c и радиусот r на опишаната кружница (цртеж десно). Прво го конструираме правоаголниот триаголник CDE така што прво го конструираме правиот агол во темето D , потоа катетата $\overline{CD} = h_c$, па во пресекот на



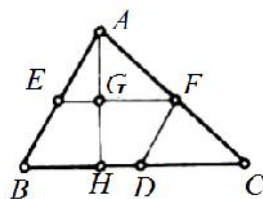
кружницата со радиус t_c и центар C , и правата на која лежи страната AB ја добиваме точката E . Бидејќи E е средина на страната AB , нормалата на страната во точката E ќе биде симетрала на страната AB . На оваа нормала наоѓаме точка S таква што $\overline{CS} = r$. Точката s е центарот на опишаната кружница на триаголникот ABC . Ја конструираме оваа кружница и во пресек со правата ED ги наоѓаме темињата A и B .

Доказот и дискусијата ги оставаме на читателот за вежба. ■

8. Конструирај триаголник ABC ако се дадени средината F на страната AC , средината D на страната BC и подножјето H на висината повлечена од темето A на страната BC .

Решение. Анализа. Нека триаголникот ABC е конструиран и нека D, F и H се дадените точки (цртеж долу десно). Нека E е средината на страната AB . Тогаш $EF \parallel BC$ и ја полови висината AH .

Конструкција. Низ точката H повлекуваме права нормална на правата HD и во точката F повлекуваме права паралелна со правата HD . Во пресекот на овие две прави ја добиваме точката G која е средина на висината, па лесно ја конструираме точката A . Пона-



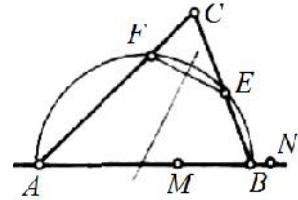
таму $AB \parallel FD$, а во пресеко на правите AF и DH е точката C .

Доказот и дискусијата ги оставаме на читателот за вежба.

9. Конструирај триаголник ABC ако се дадени подножјето E на висината повлечена од темето A кон страната BC , подножјето F на висината повлечена од темето B кон страната AC и две произволни точки M и N од правата AB

Решение. Според условот на задачата ва-

жи $\angle AEB = \angle AFB = 90^\circ$, па затоа кружницата чиј дијаметар е страната AB ги содржи точките E и F . Страната AB припаѓа на правата MN , па затоа симетралата на отсечката EF ја сече правата MN во цен-



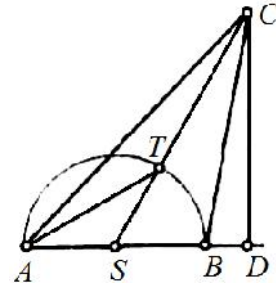
тарот на споменатата кружница. Ја конструираме оваа кружница и во пресеко со правата MN ги добиваме точките A и B . Конечно, во пресеко на правите AF и BE ја добиваме точката C .

10. Тежиштето T на триаголникот ABC припаѓа на кружницата конструирана над страната AB како над дијаметар и важи $\angle TAB = 30^\circ$.

а) Конструирај го триаголникот ABC ако $\overline{AB} = c = 8 \text{ cm}$.

б) Определи ја плоштината на триаголникот ABC .

Решение. а) Прво конструираме полукружница над дијаметар AB и во точката A конструираме агол над AB еднаков на 30° . Во пресеко на вториот крак на овој агол и полукружницата е тежиштето T . Ја определуваме средината S на AB и ја повлекуваме полуправата ST на која определуваме точка C таква што $\overline{SC} = 3\overline{ST}$, со што триаголникот ABC е конструиран.



б) Нека CD е висина на триаголникот ABC повлечена кон страната AB . Триаголникот ABT е правоаголен, па затоа $\overline{ST} = \frac{c}{2}$. Понатаму,

$\overline{SC} = \frac{3c}{2}$ и како $\angle CSD = \angle TSB = 60^\circ$, добиваме дека

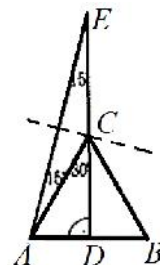
$$\overline{CD} = \frac{\overline{SC}\sqrt{3}}{2} = \frac{3c\sqrt{3}}{4}.$$

Конечно, за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$P = \frac{1}{2} \frac{3c\sqrt{3}}{4} c = \frac{3c^2\sqrt{3}}{8} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

11. Конструирај рамностран триаголник ABC ако е даден збирот на страната и висината на триаголникот $d = 5 \text{ cm}$.

Решение. Анализа. Ако висината CD на рамностранниот триаголник ABC ја продолжиме преку темето C до точка E таква што $\overline{AC} = \overline{CE}$ (цртеж десно), тогаш триаголникот ADE е правоаголен со страна $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE} = d = 5 \text{ cm}$. Триаголникот EAC е рамнокрак со агол при основата $\angle AEC = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$, што



значи дека за триаголникот ADE се познати аглите $\angle ADE = 90^\circ$, $\angle AED = 15^\circ$ и страната $\overline{DE} = 5 \text{ cm}$. Сега темето C е во пресекот на симетралата на страната AE и страната ED .

Конструкција. Конструираме триаголник ADE со страна $\overline{DE} = 5 \text{ cm}$ и агли $\angle ADE = 90^\circ$, $\angle AED = 15^\circ$. Повлекуваме симетрала s на отсечката AE и наоѓаме $s \cap ED = C$. Ја продолжуваме страната AD преку темето D и наоѓаме точка B така што $\overline{AD} = \overline{DB}$, со што триаголникот ABC е конструиран

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има единствено решение.

Задачи за самостојна работа

1. Конструирај го правоаголникот $\triangle ABC$ ако се познати проекциите $p = 2 \text{ cm}$ и $q = 4 \text{ cm}$ на неговите катети a и b , соодветно и определи ја неговата плоштина.
2. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени: $a, b + c$ и a .
3. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени: c, a и радиусот на впишаната кружница r .
4. Конструирај рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$), зададен со h_b и t_b .
5. Конструирај триаголник ABC ако се дадени: аголот $\angle BAC = 60^\circ$, висината $\overline{BB'} = 4 \text{ cm}$ и висината $\overline{CC'} = 3 \text{ cm}$.

6. Дадени се три неколинеарни точки A_1, B_1 и C' . Конструирај триаголник ABC ако A_1 и B_1 се средини на страните BC и AC , соодветно, а C' е подножјето на висина h_c .
7. Конструирај триаголник ABC ако $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\angle CAB = 45^\circ$ и $\angle ABC = 60^\circ$, а потоа конструирај права p која ги сече отсечката AB во точка D и отсечката BC во точка E такви што $\overline{DB} = \overline{DE} = \overline{CE}$.
8. Конструирај $\triangle ABC$ ако се дадени: висината $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$, тежишната линија $\overline{CC_1} = t_c = 4\text{ cm}$ и радиусот $R = 3\text{ cm}$ на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.
9. Конструирај триаголник ABC ако е даден збирот на страните $\overline{AB} + \overline{BC} = b + c = 8\text{ cm}$, $\angle CAB = \alpha = 60^\circ$ и висината $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$.
10. Конструирај триаголник ABC за кој се познати висината $\overline{CC'} = h_c = 3\text{ cm}$, страната $\overline{AC} = b = 4\text{ cm}$ и тежишната линија $\overline{AM} = t_a = 5\text{ cm}$.

Литература

1. Dokić, K.: Konstruktivni zadaci u ravni, Matematički list, Beograd
2. Vukadinović, J.: Konstrukcija proporcionalnih duži, Matematički list, Beograd
3. Ћетковић, Г.: Решавање конструктивних задатака, Математички лист, Београд
4. Малчески, Р.: Решаваме конструктивни задачи (втор дел), Математички талент, Скопје
5. Малчески, Р.: Решаваме конструктивни задачи, Нумерус (Математички талент), Скопје