Децимално представљање рационалних бројева

др Зоран Каделбург, **Београд**

Просто и мешовито периодични рационални бројеви

Сигурно је да сви ученици (бар они који читају „Тангенту") знају шта су то рационални, а шта ирационални бројеви, као и на који начин се они разликују када се представе помоћу својих децималних репрезентација. Није, међутим, баш извесно да сви знају нешто финију класификацију рационалних бројева на просто и мешовито периодичне, као и на који начин се одређује дужина периоде децималног броја. Како ти појмови имају примене и у неким такмичарским задацима, овде ће они бити нешто детаљније приказани. Потпуности ради, почињемо следећом добро познатом дефиницијом.

Дефиниција 1. Реални број α зовемо **рационалним** ако се може написати у облику

$$\alpha = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Реални број који се тако не може написати зовемо **ирационалним**.

Јасно је да се сваки рационалан број може написати у облику (1) са $(p, q) = 1$, па ћемо у даљем увек претпостављати да је тај услов испуњен. Скуп рационалних бројева означаваћемо са $\mathbf{Q}$.

У даљем ћемо, одређености ради, говорити о позитивним бројевима, јер преношење резултата на негативне бројеве не представља никакав проблем. Подсетимо се да се сваки позитиван реалан број α може на јединствен начин приказати у **децималном запису**

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \tag{2}$$

где је a_0 ненегативан цео број, $a_1, a_2, \dots$ су цифре, тј. елементи скупа $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ и нису сви a_n почев од неког једнаки 9. (Последњи услов је неопходан да би се обезбедила јединственост записа. Без њега би неки бројеви могли да имају два записа; нпр. $1,000\ldots = 0,999\ldots$.)

Уочимо међу свим таквим записима оне који су **периодични**, тј. оне код којих се почев од извесног места, једна цифра или група цифара периодично понавља. На пример, такви су бројеви $0,0216\,0216\,0216\ \dots$ $41,312\,12\,12\ \dots$, које ћемо краће записивати као $0,(0216)$, односно $41,3(12)$. Бројевима са периодичним записом сматраћемо и оне код којих је тај запис коначан, јер је нпр. $13,265 = 13,265(0)$.

Теорема 1. *Реалан број α је рационалан ако и само ако је његов децимални запис (2) периодичан.*

Обзиром да је ово тврђење добро познато ученицима, његов доказ ћемо овде изоставити. Приметимо само да уобичајени доказ даје и ефективан поступак за писање датог периодичног рационалног броја у облику p/q.

Поставимо сада задатак да се испита када се дати рационалан број представља у облику коначног децималног броја, када у облику **просто-периодичног**, тј. броја облика $\alpha = a_0, (a_1 a_1 \dots a_s)$, а када у облику **мешовито-периодичног** броја

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_t (a_{t+1} a_{t+2} \dots a_{t+s}),$$

код којег постоји „претпериода“ $a_1a_2\ldots a_t$. Следећа теорема даје одговор на то питање.

Теорема 2. *Нека је $\alpha = p/q$ рационалан број, $(p,q)=1$.*

1° *Број α има коначан децималан запис ако и само ако је $q = 2^a\cdot 5^b$ $(a, b\in \mathbf{N}\cup\{0\})$.*

2° *Број α има бесконачан просто-периодичан запис ако и само ако је $(q,10)=1$.*

Доказ. 1° Претпоставимо најпре да број α има коначан децималан запис

$$\frac{p}{q} = a_0,a_1a_2\ldots a_n = a_0 + a_1\cdot 10^{-1} + a_2\cdot 10^{-2}+\cdots + a_n\cdot 10^{-n}.$$

Свођењем на заједнички именилац добијамо да је $\dfrac{p}{q} = \dfrac{c}{10^n}$, одакле, после евентуалног скраћивања, следи да је $q = 2^a\cdot 5^b$.

Нека је, обратно, $q = 2^a\cdot 5^b$. Проширивањем разломка $\dfrac{p}{2^a\cdot 5^b}$ са 5^{a-b} или 2^{b-a} (зависно од тога да ли је $a\geqslant b$ или $a<b$) добијамо

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{10^m},$$

где су r и m природни бројеви. Природан број r има свој декадни запис

$$r = \overline{c_kc_{k-1}\ldots c_1c_0} = c_k\cdot 10^k + c_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\cdots + c_1\cdot 10 + c_0,$$

па добијамо да је

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{10^m} = c_k\cdot 10^{k-m} + c_{k-1}\cdot 10^{k-1-m}+\cdots + c_1\cdot 10^{1-m} + c_0\cdot 10^{-m},$$

што значи да се број p/q записује у децималном запису помоћу истих цифара као и број r и, евентуално, извесног броја нула испред њих, у случају да је $k<m$. Дакле, број p/q има коначан децималан запис.

2° За доказ овог дела тврђења, као и за одређивање дужине периоде рационалног броја биће нам потребни појмови које ћемо увести у наредном одељку.

Поредак броја по датом модулу

Претпостављаћемо да су појам **конгруенције по модулу**, као и основна својства те релације, познати читаоцима. Увешћемо овде само појмове са којима можда нису сви упознати.

Нека је m фиксиран цео број већи од 1. Међу елементима скупа $\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ има оних који су узајамно прости са m (такав је, свакако, број 1), а и оних који са m имају заједничких фактора (на пример, такав је број 0). Укупан број елемената поменутог скупа који су узајамно прости са m означава се са $\varphi(m)$. Овако уведена функција φ зове се **Ојлерова функција** и игра важну улогу у многим питањима теорије бројева. Наводимо неколико њених првих вредности.

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(m)$	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Пример 1. Како су за прост број p сви елементи скупа $\{0,1,2,\ldots,p-1\}$, сем 0, узајамно прости са p, то је $\varphi(p)=p-1$. Ако је $n=2^k$, лако се проверава да је $\varphi(n)=2^{k-1}$. $\triangle$

Једна од важних теорема Теорије бројева је и следећа **Ојлерова теорема** коју овде наводимо без доказа (за доказ видети, на пример, [2]).

ТЕОРЕМА 3. *Ако је* $(a, m) = 1$, *онда је* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Према овој теореми, ако су бројеви a и m узајамно прости, онда постоје природни бројеви t, такви да је $a^t \equiv 1 \pmod{m}$. Наиме, један од таквих бројева је $t = \varphi(m)$. Јасно је да важи и обратно: ако је $a^t \equiv 1 \pmod{m}$ за неко $t \in \mathbf{N}$, онда је за неко $u \in \mathbf{Z}$ испуњено $a \cdot a^{t-1} - um = 1$, што значи да су бројеви a и m узајамно прости.

Приметимо, међутим, да $\varphi(m)$ не мора бити најмањи број са описаним својством.

ПРИМЕР 2. Лако се проверава да је $\varphi(22) = 10$, па је $3^{10} \equiv 1 \pmod{22}$, али је такође и $3^5 \equiv 1 \pmod{22}$. $\triangle$

ДЕФИНИЦИЈА 2. Најмањи од природних бројева t за које важи $a^t \equiv 1 \pmod{m}$ назива се **поретком** броја a по модулу m и означава са $r_m(a)$.

ПРИМЕР 3. Поредак броја 5 по модулу 11 једнак је 5, јер је $3^1, 3^2, 3^3, 3^4 \not\equiv 1 \pmod{11}$, а $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$. $\triangle$

Према напомени датој после Ојлерове теореме, поредак броја a по модулу m постоји ако и само ако су бројеви a и m узајамно прости. Јасно је да сви бројеви који су међусобно конгруентни по модулу m (припадају истој класи еквиваленције) имају исти поредак по модулу m (ако га уопште имају). Међутим, могуће је да бројеви из разних класа имају једнаке поретке.

Следеће једноставно својство олакшава налажење поретка.

ТЕОРЕМА 4. *Ако је t поредак броја a по модулу m, тада је $a^s \equiv 1 \pmod{m}$, ако и само ако $t \mid s$. Специјално, $r_m(a) \mid \varphi(m)$.*

Доказ. Нека је $a^s \equiv 1 \pmod{m}$. Ако би било $s = tq + r$, $0 < r < t$, из $a^s = (a^t)^q a^r$ би следило $a^r \equiv 1 \pmod{m}$, што противречи минималности поретка t.

Обратно, ако је $s = tq$, онда је $a^s = (a^t)^q \equiv 1 \pmod{m}$. □

ПРИМЕР 4. Већ смо користили да је $\varphi(22) = 10$. Зато поретци по модулу 22 бројева 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21 (који су узајамно прости са 22) могу бити само 1, 2, 5 или 10. Тако, на пример, поредак броја 3 једнак је 5, јер је $3^1, 3^2 \not\equiv 1 \pmod{22}$, $3^5 \equiv 1 \pmod{22}$, а поредак броја 7 је 10, јер је $7^1, 7^2, 7^5 \not\equiv 1 \pmod{22}$, а $7^{10} \equiv 1 \pmod{22}$. $\triangle$

ПОСЛЕДИЦА. *Ако је $t = r_m(a)$, тада је*

$$a^x \equiv a^y \pmod{m} \quad \text{ако и само ако} \quad x \equiv y \pmod{t}.$$

Доказ. Нека је, на пример, $x \geqslant y$. Ако је $a^x \equiv a^y \pmod{m}$, тада, због $(a, m) = 1$, важи и $a^{x-y} \equiv 1 \pmod{m}$, па из претходне теореме следи $t \mid x - y$. Обратно, из $x \equiv y \pmod{t}$ следи $x = y + t\alpha$, $\alpha \geqslant 0$ и $a^x = a^{y+t\alpha} = a^y (a^t)^\alpha \equiv a^y \pmod{t}$. □

За неке бројеве поредак по модулу m може бити и једнак $\varphi(m)$.

ДЕФИНИЦИЈА 3. Ако је поредак броја g по модулу m једнак $\varphi(m)$, број g се назива **примитивним кореном** по модулу m.

ПРИМЕР 5. Посматрајмо остатке $1, 2, 3, -3, -2, -1$ по модулу 7 ($\varphi(7) = 6$). Лако се проверава да су њихови поретци по модулу 7 једнаки, редом, $1, 3, 6, 3, 6, 2$. Бројеви 3 и -2 су примитивни корени по модулу 7.

По модулу 8, бројеви који имају поредак су 1, 3, 5 и 7. Ниједан од њих, међутим, није примитивни корен, јер је поредак сваког од њих једнак 2 (проверити!), а $\varphi(8) = 4$. △

Може се доказати (в. нпр [1]) да су једини бројеви који имају примитивне корене: 2, 4 и бројеви облика p^α, $2p^\alpha$ (p непаран прост број).

Дужина периоде рационалног броја

Вратимо се сада испитивању децималних записа рационалних бројева.

Теорема 5. *Нека је $(q, 10) = 1$, $1 \leqslant p < q$ и $(p, q) = 1$. Тада број $\dfrac{p}{q}$ има бесконачан просто-периодичан децималан запис са s цифара у периоди, где је s поредак броја 10 по модулу q, $s = r_q(10)$.*

Доказ. Нека је $s = r_q(10)$, тј. $10^s \equiv 1 \pmod q$. Дељење $10p$ са q даје $10p = qc_1 + r_1$, где $0 \leqslant r_1 < q$ и $(r_1, q) = (10p, q) = 1$; специјално, $r_1 \neq 0$, тј. $1 \leqslant r_1 < q$, па пар r_1, q задовољава исте услове као p, q и поступак се може наставити. Добија се

$$(3) \qquad 10p = qc_1 + r_1, \quad 10r_1 = qc_2 + r_2, \quad \ldots, \quad 10r_{s-1} = qc_s + r_s, \quad \ldots$$

где је $1 \leqslant r_i < q$, $0 \leqslant c_i = \dfrac{10r_{i-1} - r_i}{q} < 10$, $(r_i, q) = 1$. Одатле је

$$(4) \qquad \frac{p}{q} = \frac{c_1}{10} + \frac{r_1}{10q} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 q} = \cdots = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_s}{10^s} + \frac{r_s}{10^s q}.$$

Следи $p \cdot 10^s = (\ldots)q + r_s$ и $r_s \equiv p \cdot 10^s \equiv p \pmod q$, тј. $r_s = p$. На тај начин у (3) се релације после s корака периодично понављају, па из (4) добијамо

$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_s}{10^s} + \frac{c_1}{10^{s+1}} + \cdots + \frac{c_s}{10^{2s}} + \cdots = 0,(c_1 \ldots c_s).$$

При том је добијена дужина периоде s најмања могућа, јер би $\dfrac{p}{q} = 0,(c_1 \ldots c_t)$ имало за последицу

$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_t}{10^t} + \frac{1}{10^t}\frac{p}{q},$$

односно $p \cdot 10^t = (\ldots)q + p \equiv p \pmod q$, што би, због $(p, q) = 1$, повлачило $10^t \equiv 1 \pmod q$, па би због $s = r_q(10)$ следило $s \leqslant t$. □

Пример 6. Наћи број цифара у периоди децималног записа броја 22/91.

Важи $\varphi(91) = 72$. Испитујући делиоце 1, 2, 3, 4, 6, 8, ..., 72 броја 72 налазимо да је најмањи број s за који је $10^s \equiv 1 \pmod{91}$ једнак 6. Зато број 22/91 има 6 цифара у периоди. Заиста, $22/91 = 0,(241758)$. △

Специјално, децимални запис броја a/p, где је p прост број и $1 \leqslant a \leqslant p-1$ увек има највише $p-1$ цифара у периоди, и број тих цифара је делилац броја $p-1$. Ако је 10 примитивни корен по модулу p, дужина периоде броја a/p је максимална и износи $p-1$. На пример, $s = 18$ је најмањи број за који је $10^s \equiv 1 \pmod{19}$ и важи $1/19 = 0,(052\,631\,578\,947\,368\,421)$.

Последица. *Ако је $\dfrac{p}{q} = 0,(c_1 \ldots c_s)$, где је $s = r_q(10)$ и c_i, r_i су дефинисани помоћу (3), тада је $\dfrac{r_i}{q} = 0,(c_{i+1} \ldots c_s c_0 \ldots c_i)$.*

Пример 7. $\dfrac{14}{19} = 0,(736\,842\,105\,263\,157\,894)$. $\triangle$

Сада можемо и да завршимо доказ теореме 2. о просто-периодичним децималним бројевима.

Доказ теореме 2.2°. Преостаје да се размотри случај $q = 2^a \cdot 5^b \cdot q'$, где $(q', 10) = 1$ и $\max\{a, b\} = c \geqslant 1$. Тада је

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^a \cdot 5^b \cdot q'} = \frac{1}{10^c}\frac{A}{q'},$$

$(A, q') = 1$, $(q', 10) = 1$, па се $\dfrac{A}{q'}$, после издвајања целог дела, изражава просто-периодичним записом са дужином периоде $r_{q'}(10)$, а дељење са 10^c само помера децималну запету. $\square$

Не представља тешкоћу све наведене резултате пренети на случај записивања броја у некој основи различитој од 10.

Задаци

1. Доказати да за сваки $n \in \mathbf{N}$ број $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$ има мешовито-периодичан децималан запис.

2. (Савезно такмичење 74.4.1) Наћи просто-периодичан децималан број који је већи од $1/4$ и мањи од $1/3$, а збир цифара периоде му је за 12 већи од квадрата броја тих цифара.

3. (Савезно такмичење 60.4.3) Разлика реципрочних вредности два узастопна природна броја је $0,0(a)$, где $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Наћи те бројеве.

4. (Савезно такмичење 94.3-4.2) Нека је q прост број већи од 5 и p природан број, $1 \leqslant p < q$. Претпоставимо да је децимални запис броја p/q просто периодичан са периодом од $2n$ цифара. Доказати да је збир броја кога формирају првих n цифара периода и броја кога формирају последњих n цифара периода једнак $10^n - 1$.

Решење. Према теореми 5, $2n$ је поредак броја 10 по модулу q, тј. $t = 2n$ је најмањи број за који је $10^t \equiv 1 \pmod q$. Одатле следи да је $10^n \equiv -1 \pmod q$ (јер $10^n \equiv 1 \pmod q$ није могуће). Зато $q \mid 10^n + 1$ и $\dfrac{10^n p}{q} + \dfrac{p}{q}$ је цео број. Међутим, ако је $\dfrac{p}{q} = 0,(a_1 \ldots a_{2n})$, онда је

$$\frac{10^n p}{q} + \frac{p}{q} = \overline{a_1 \ldots a_n},(a_{n+1} \ldots a_{2n} a_1 \ldots a_n) + 0,(a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n}),$$

па збир $0,(a_{n+1} \ldots a_n) + 0,(a_1 \ldots a_{2n})$ мора бити једнак $1 = 0,(9)$, што је могуће једино у случају $a_1 = a_{n+1} = a_2 + a_{n+2} = \cdots = a_n + a_{2n} = 9$. Одатле следи тврђење задатка. $\triangle$

5. (Републичко такмичење 94.3-4.4) Означимо са S_n скуп уређених n-торки које се могу формирати од n узастопних децимала у децималном запису реалног броја a. Доказати следећа тврђења:

(а) Ако за неко n скупови S_n и S_{n+1} имају исти број елемената, онда је a рационалан.

(б) Ако се у децималама децималног записа реалног броја a појављују све цифре и ако за неко n број елемената у S_n није већи од $n + 8$, онда је a рационалан број.

6. (Савезно такмичење 00.3-4.3) Нека је S скуп свих простих бројева p, таквих да је $\frac{1}{p} = 0,(c_1 c_2 \ldots c_{3r_p})$, где је $3r_p$ дужина основног периода у децималном запису. За $k \in \{1, 2, \ldots, r_p\}$ дефинишемо $f(k,p) = c_k + c_{k+r_p} + c_{k+2r_p}$. Одредити максимум скупа $\{ f(k,p) \mid p \in S,\ k = 1, 2, \ldots, r_p \}$.

Решење. Нека је $p \in S$. На основу теореме 5, $3r_p$ је поредак броја 10 по модулу p, дакле $p \mid 10^{3r_p} - 1 = (10^{r_p} - 1)(10^{2r_p} + 10^{r_p} + 1)$, при чему $p \nmid 10^{r_p} - 1$, па $p \mid 10^{2r_p} + 10^{r_p} + 1$. За произвољно $k \in \{1, 2, \ldots, r_p\}$, сабирањем једнакости

$$10^{k-1} \cdot \frac{1}{p} = c_1 \ldots c_{k-1}, (c_k \ldots c_{k-1}),$$

$$10^{k-1} \cdot \frac{10^{r_p}}{p} = c_1 \ldots c_{k+r_p-1}, (c_{k+r_p} \ldots c_{k+r_p-1}),$$

$$10^{k-1} \cdot \frac{10^{2r_p}}{p} = c_1 \ldots c_{k+2r_p-1}, (c_{k+2r_p} \ldots c_{k+2r_p-1}),$$

(означено је $c_0 = c_{3r_p}$) добија се релација облика $x = y + z$, где су x и y цели бројеви, па је и $z = 0,(c_k \ldots c_{k-1}) + 0,(c_{k+r_p} \ldots c_{k+r_p-1}) + 0,(c_{k+2r_p} \ldots c_{k+2r_p-1})$ цео број; како је он збир три броја који припадају интервалу $(0,1)$, важи $z < 3$, па је $z \leqslant 2$. С друге стране је $c_k < c_k,(c_{k+1} \ldots c_k) = 10 \cdot 0,(c_k \ldots c_{k-1})$ и, слично, $c_{k+r_p} < 10 \cdot 0,(c_{k+r_p} \ldots c_{k+r_p-1})$ и $c_{k+2r_p} < 10 \cdot 0,(c_{k+2r_p} \ldots c_{k+2r_p-1})$, па је за свако $k \in \{1, 2, \ldots, r_p\}$ испуњено $c_k + c_{k+r_p} + c_{k+2r_p} < 10 \cdot z \leqslant 20$, тј. $c_k + c_{k+r_p} + c_{k+2r_p} \leqslant 19$. Како је $\frac{1}{7} = 0,(142857)$, то је за $p = 7$ $(r_p = 2)$ и $k = 2$ тражени збир једнак $4 + 8 + 7 = 19$, па је и $\max f(k,p) = 19$. △

Литература

[1.] А. А. Бухштаб: *Теория чисел*, Просвещение, Москва 1966.

[2.] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *Увод у теорију бројева*, 4. издање, Друштво математичара Србије, 2004.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2004/05 година