

Регионален натпревар 2000

I година

1. Од 37 монети наредени во еден ред, 9 се свртени со „петка“, а 28 со „глава“ нагоре. Во еден чекор се превртуваат кои било 20 монети. Дали е можно по неколку чекори сите монети да бидат „петки“? а „глави“? Во колку најмалку чекори е можно тоа?

Решение. Нека со првиот чекор x „петки“ свртиме во „глава“. Тогаш $20 - x$ „глави“ ќе свртиме во „петки“. По овој чекор имаме $9 - x + (20 - x) = 29 - 2x$ „петки“ и $x + (28 - (20 - x)) = 8 + 2x$ „глави“. По првиот чекор ќе имаме непарен број „петки“ и парен број „глави“. Очигледно, оваа законитост ќе остане и во секој нареден чекор. Значи, секогаш ќе имаме непарен број „петки“, т.е. никогаш нема да добиеме сите монети да бидат „глави“. Бидејќи по првиот чекор бројот на глави останува парен, тогаш е можно да се избере x таков што $2x + 8 = 20$, односно $x = 6$. Па, по првиот чекор ќе имаме 17 „петки“ и 20 „глави“. Во вториот чекор 20 „глави“ ги превртуваме во „петки“ и сите монети се превртени со „петка“ нагоре. Значи, сите монети ќе бидат свртени нагоре со „петка“ во најмалку 2 чекора.

2. Нека x, y и z се природни броеви такви што $x^3 + y^3 + z^3$ е делив со 7. Докажи дека производот xyz е делив со 7.

Решение. Нека n е произволен природен број. Тогаш n може да се запише во облик $n = 7k + r$, каде што $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Бројот $n^3 = (7k + r)^3$ при делење со 7 дава ист остаток како и бројот r^3 при делење со 7. Броевите $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3$ при делење со 7 даваат остатоци 0, 1, 1, 6, 1, 6, 6 соодветно. Оттука добиваме дека бројот $x^3 + y^3 + z^3$ при делење со 7 дава остаток кој е остаток при делење на збирот на три броја кои припаѓаат на множеството $\{0, 1, 6\}$ со 7. Но, за да биде збирот на три броеви од множеството $\{0, 1, 6\}$ делив со 7, мора барем еден од нив да е 0, а тоа значи дека барем еден од броевите x, y, z да биде делив со 7. Следствено, производот xyz е делив со 7.

3A. Одреди го најмалиот природен број n така што да важи пропорцијата

$$h_a : h_b : h_c = n : (n+1) : (n+2)$$

ако h_a, h_b, h_c се должини на висините во триаголникот ABC .

Решение. Од $2P = ah_a = bh_b = ch_c$ добиваме

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n+2},$$

односно

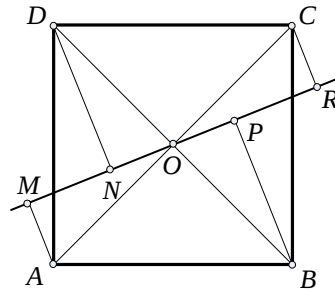
$$a:b:c = (n+1)(n+2):n(n+2):n(n+1) = (n^2+3n+2):(n^2+2n):(n^2+n).$$

Бидејќи $h_a < h_b < h_c$, следува $a > b > c$, па доволно е да најдеме природен број n за кој важи неравенството $a < b + c$. Добиваме $n^2 + 3n + 2 < n^2 + 2n + n^2 + n$, а оттука $n^2 > 2$. Бараниот најмал природен број е 2.

4А. Низ пресекот O на дијагоналите на квадратот $ABCD$ е повлечена произволна права p , која не минува низ темињата на квадратот. Најди го збирот од квадратите на растојанијата од секое теме до правата p , ако должината на страната на квадратот е 1 m .

Решение. Од складноста на триаголниците AOM и COR следува $\overline{AM} = \overline{CR} = x$, а од складноста на триаголниците BPO и DNO следува $\overline{BP} = \overline{DN} = y$. Од складноста пак, на правоаголните триаголници AMO и BPO ($\overline{AO} = \overline{BO}$, $\angle AOM = \angle OBP$ агли со заемно нормални краци) следува $\overline{OP} = \overline{AM} = x$. Од правоаголниот триаголник OPB добиваме $\overline{OP}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{BO}^2$ односно $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Оттука имаме

$$\overline{AM}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CR}^2 + \overline{DN}^2 = 2x^2 + 2y^2 = 1.$$



3Б. Дали постојат реални броеви x и y за кои во исто време се исполнети равенствата

$$x + y = 1, \quad x^2 + y^2 = 2 \quad \text{и} \quad x^3 + y^3 = 3?$$

Решение. Да претпоставиме дека такви броеви x и y постојат. Ако го квадрираме изразот $x + y = 1$ добиваме $x^2 + 2xy + y^2 = 1$ па, имајќи го во предвид изразот $x^2 + y^2 = 2$ добиваме $xy = -\frac{1}{2}$. Ако го кубираме првото равенство добиваме

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 1$$

и бидејќи $x + y = 1$, $xy = -\frac{1}{2}$, $x^3 + y^3 = 3$, добиваме

$$3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1$$

што не е можно. Значи, не постојат реални броеви x и y за кои се исполнети во исто време дадените равенства.

4Б. Тангентата на впишаната кружница во триаголникот ABC , паралелна на страната AB , ги сече страните AC и BC во точките A_1 и B_1 , соодветно. Пресметај ја должината на отсечката A_1B_1 , ако должините на страните на триаголникот ABC се a, b и c .

Решение. Нека $\overline{A_1C} = b_1$, $\overline{B_1C} = a_1$, $\overline{A_1B_1} = x$. Од сличноста на триаголниците ABC и A_1B_1C следува $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A_1B_1} : \overline{B_1C}$ односно

$$a_1 = \frac{a}{c} x \quad (1)$$

Од истата сличност следува $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A_1B_1} : \overline{A_1C}$, односно

$$b_1 = \frac{b}{c} x \quad (2)$$

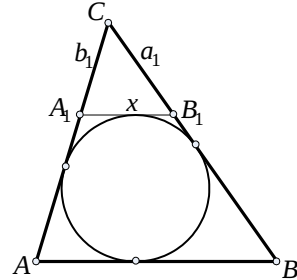
Бидејќи четириаголникот ABA_1B_1 е тангентен, следува:

$$\overline{AB} + \overline{A_1B_1} = \overline{AA_1} + \overline{BB_1}$$

односно,

$$c + x = b - b_1 + a - a_1.$$

Од последното равенство и равенствата (1) и (2) следува $x = \frac{a+b-c}{a+b+c} c$.



II година

1. Ако $ax^3 = by^3 = cz^3$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, докажи дека

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Решение. Да ставиме $A = \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}$. Имајќи ги предвид дадените равенства, добиваме:

$$A = \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} = \sqrt[3]{ax^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = x\sqrt[3]{a}.$$

Аналогно, $A = y\sqrt[3]{b}$ и $A = z\sqrt[3]{c}$. Понатаму, $\sqrt[3]{a} = \frac{A}{x}$, $\sqrt[3]{b} = \frac{A}{y}$, $\sqrt[3]{c} = \frac{A}{z}$, а оттука следува

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \frac{A}{x} + \frac{A}{y} + \frac{A}{z} = A \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = A = \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}.$$

2. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ со S е означен пресекот на дијагоналите. Нека $P_1 = P_{ABS}$, $P_2 = P_{BCS}$, $P_3 = P_{CDS}$, $P_4 = P_{DAS}$. Ако

$$P^2 = P_1P_3 \text{ и } 2P_4 = P_1 + P_3,$$

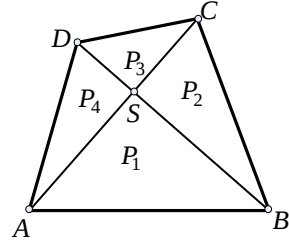
докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

Решение. Нека h_1 е висината во триаголниците ABS и BCS спуштена од темето B , а h_2 е висината спуштена во триаголниците ASD и CDS спуштена од темето D . Тогаш

$$P_1 = \frac{1}{2} \overline{AS} \cdot h_1, \quad P_2 = \frac{1}{2} \overline{CS} \cdot h_1,$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \overline{CS} \cdot h_2 \quad \text{и} \quad P_4 = \frac{1}{2} \overline{AS} \cdot h_2,$$

а оттука добиваме $P_1 P_3 = P_2 P_4$.



Од ова равенство и од условот $P_2^2 = P_1 P_3$ следува $P_2 = P_4$. Оттука добиваме дека $P_2 = \sqrt{P_1 P_3}$ и $2P_2 = P_1 + P_3$. Значи $2\sqrt{P_1 P_3} = P_1 + P_3$, а оттука со елементарни трансформации, следува дека $P_1 = P_3$. Бидејќи $P_1 + P_4 = P_3 + P_4$, добиваме дека триаголниците ABD и ACD имаат иста плоштина. Бидејќи имаат заедничка страна (AD), следува дека висините спуштени од темињата B и C кон страната AD се еднакви, односно, темињата B и C се на еднакво растојание од правата AD . Ова значи дека $AD \parallel BC$. Бидејќи $P_1 + P_2 = P_1 + P_4$, следува дека триаголниците ABD и ABC имаат еднаква плоштина, па аналогно како во претходниот случај, заклучуваме дека $AB \parallel CD$. Со тоа докажавме дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

ЗА. Најди ја најмалата и најголемата вредност на изразот $|z - \frac{1}{z}|$, ако z е комплексен број таков што $|z| = 2$.

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$|z - \frac{1}{z}| = \left| \frac{z^2 - 1}{z} \right| = \frac{|z^2 - 1|}{|z|} = \frac{|z^2 - 1|}{2}.$$

Бидејќи

$$|z^2 - 1| \geq |z^2| - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \text{и} \quad |z^2 - 1| \leq |z^2| + 1 = 5,$$

добиваме $\frac{3}{2} \leq |z - \frac{1}{z}| \leq \frac{5}{2}$. Ако $z = \pm 2$, тогаш $|z - \frac{1}{z}| = \frac{3}{2}$, па најмалата вредност на $|z - \frac{1}{z}|$ е $\frac{3}{2}$ а ако $z = \pm 2i$, тогаш $|z - \frac{1}{z}| = \frac{5}{2}$, па најголемата вредност на $|z - \frac{1}{z}|$ е $\frac{5}{2}$.

Втор начин. Нека $z = a + ib$. Од $|z| = 2$ следува $a^2 + b^2 = 4$, па имаме:

$$\begin{aligned}
 \left| z - \frac{1}{z} \right|^2 &= \left| \frac{z^2 - 1}{z} \right|^2 = \frac{|z^2 - 1|^2}{|z|^2} = \frac{|z^2 - 1|^2}{4} = \frac{1}{4} |z - 1|^2 |z + 1|^2 \\
 &= \frac{1}{4} (a^2 - 2a + 1 + b^2)(a^2 + 2a + 1 + b^2) \\
 &= \frac{1}{4} (5 - 2a)(5 + 2a) = \frac{1}{4} (25 - 4a^2) \\
 &= \frac{1}{4} (25 - 4(4 - b^2)) = b^2 + \frac{9}{4}.
 \end{aligned}$$

Од $a^2 + b^2 = 4$ следува дека $0 \leq b^2 \leq 4$, па $\frac{3}{2} \leq \left| z - \frac{1}{z} \right| \leq \frac{5}{2}$. Најмалата вредност е за $z = \pm 2$ и изнесува $\frac{3}{2}$, а најголемата вредност е за $z = \pm 2i$ и изнесува $\frac{5}{2}$.

4A. Нека p и q се реални броеви такви што равенката

$$x^2 + 4\left(p - \frac{6q}{p}\right)x + 4q = 0$$

нема реални решенија. Докажи дека равенката

$$x^2 + px + q = 0$$

има две различни реални решенија.

Решение. Бидејќи дадената равенка нема реални решенија, следува

$$16\left(p - \frac{6q}{p}\right)^2 - 16q < 0,$$

односно $\left(p - \frac{6q}{p}\right)^2 - q < 0$. Множејќи го даденото неравенство со p^2 добиваме

$$p^4 - 12p^2q - p^2q + 36q^2 < 0.$$

Оттука добиваме

$$(p^2 - 4q)(p^2 - 9q) < 0.$$

Имаме две можности:

$$\begin{array}{ll}
 1^\circ \quad \begin{cases} p^2 - 4q < 0 \\ p^2 - 9q > 0 \end{cases} & \text{и} \quad 2^\circ \quad \begin{cases} p^2 - 4q > 0 \\ p^2 - 9q < 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Ако важи 1° , тогаш множејќи го второто неравенство со -1 добиваме

$$\begin{cases} p^2 - 4q < 0 \\ -p^2 + 9q < 0 \end{cases},$$

па собирајќи ги двете неравенства добиваме $5q < 0$, што не е можно, бидејќи од условот

$\left(p - \frac{6q}{p}\right)^2 - q < 0$ следува $0 < \left(p - \frac{6q}{p}\right)^2 < q$. Значи $p^2 - 4q > 0$ и $p^2 - 9q < 0$. Со тоа

докажавме дека равенката $x^2 + px + q = 0$ има две различни реални решенија.

3Б. Нека z и w се комплексни броеви такви што $|z|=|w|=|z-w|$. Пресметај ја вредноста на $(\frac{z}{w})^{300}$.

Решение. Ако $x = \frac{z}{w}$, тогаш

$$|x| = \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} = 1, \quad |x-1| = \left| \frac{z}{w} - 1 \right| = \frac{|z-w|}{|w|} = 1.$$

Од

$$1 = |x-1|^2 = (x-1)(\overline{x-1}),$$

добиваме $x\bar{x} - x - \bar{x} + 1 = 1$. Но бидејќи $1 = |x|^2 = x\bar{x}$, следува $x - 1 + \bar{x} = 0$. Ако помножиме со x ($x \neq 0$), ќе добиеме $x^2 - x + 1 = 0$, а од тука, множејќи со $x+1$, ($x \neq -1$), ќе добиеме $x^3 + 1 = 0$, односно $x^3 = -1$. Конечно, $(\frac{z}{w})^{300} = (x^3)^{100} = 1$.

4Б. Реши го, во множеството на реалните броеви, системот равенки

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + xy + y^2 = 19. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме двете равенки, добиваме

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 30,$$

односно

$$(x+y)^2 + (x+y) = 30.$$

Со воведување на смената $t = x+y$, ја добиваме квадратната равенка

$$t^2 + t - 30 = 0,$$

чии решенија се $t_1 = 5$ и $t_2 = -6$. Од $x+y=5$, добиваме $y=5-x$, па заменувајќи во една од дадените равенки, добиваме $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ и $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. Од $x+y=-6$ добиваме $y=-6-x$, па заменувајќи во една од равенките добиваме комплексни решенија. Значи дадениот систем има два пара реални решенија (3,2) и (2,3).

III година

1. Докажи го неравенството $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4,4$.

Решение. Преминувајќи во логаритам со основа 2 и користејќи го неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме:

$$\begin{aligned}\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 &= \frac{\log_2 5}{\log_2 4} + \frac{\log_2 6}{\log_2 5} + \frac{\log_2 7}{\log_2 6} + \frac{\log_2 8}{\log_2 7} \\ &\geq 4 \sqrt[4]{\frac{\log_2 5}{\log_2 4} \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \frac{\log_2 7}{\log_2 6} \frac{\log_2 8}{\log_2 7}} \\ &= 4 \sqrt[4]{\frac{\log_2 8}{\log_2 4}} = 4 \sqrt[4]{\frac{3}{2}} = 4 \cdot 1,1 = 4,4.\end{aligned}$$

2. Дадена е правилна четириаголна пирамида $SABCD$ со основа $ABCD$. Низ темињата B , C и низ средината $z + \sqrt{x} = 3$ на работ SA е повлечена рамнина. Најди го соодносот на волумените на деловите од пирамидата, на кои е поделена со дадената рамнина.

Решение. Нека волуменот на дадената пирамида е V , а должината на висината на пирамидата $ABCD$ е H . Рамнината низ точките B , C и M го сече работ SD во точката N која е негова средина. Со V_1 ќе го означиме волуменот на $ABCDMN$, а со V_2 волуменот $BCMNS$. Забележуваме дека

$$\begin{aligned}V_1 &= V_{ABDM} + V_{DMNB} + V_{BCDN} \\ V_{ABDM} &= \frac{1}{3} P_{ABD} \frac{H}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} P_{ABCD} \frac{H}{2} = \frac{1}{4} V \\ V_{BCDN} &= \frac{1}{3} P_{BCD} \frac{H}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} P_{ABCD} \frac{H}{2} = \frac{1}{4} V.\end{aligned}$$

Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ADS , следува дека $P_{DNM} = \frac{1}{4} P_{ADS}$. Ако со H_1 ја означиме висината на пирамидата $ABDS$ спуштена од темето B кон сидот ADS , тогаш за волуменот на пирамидата имаме $V_{ADSB} = \frac{1}{3} P_{ADS} \cdot H_1$.

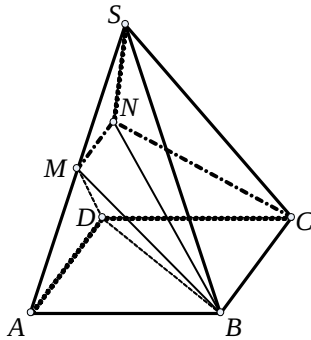
Но, $V_{ADSB} = \frac{1}{2} V$, па за волуменот на пирамидата $DNMB$ добиваме

$$V_{DNMB} = \frac{1}{3} P_{DNM} \cdot H_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} P_{ADS} \cdot H_1 = \frac{1}{4} V_{ADSB} = \frac{1}{8} V$$

Конечно,

$$V_1 = \frac{1}{4} V + \frac{1}{8} V + \frac{1}{4} V = \frac{5}{8} V, \text{ а } V_2 = V - V_1 = \frac{3}{8} V.$$

Следува $V_1 : V_2 = 5 : 3$.



3A. Нека $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Докажи го неравенството

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Решение. Имаме ж

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 1 + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} = 1 + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin 2x}.$$

За кои било ненегативни реални броеви a и b важи $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, па ставајќи $a = \frac{1}{\sin x}$, $b = \frac{1}{\cos x}$, (бидејќи $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ и $\cos x$ се позитивни) добиваме

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin x \cos x}} = 2\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}}.$$

Бидејќи $0 < x < \frac{\pi}{2}$, следува $0 < 2x < \pi$, па $\sin 2x > 0$ и $\frac{1}{\sin 2x} \geq 1$. Конечно добиваме

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) &= 1 + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin 2x} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}} + \frac{2}{\sin 2x} \\ &\geq 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

4А. Нека AD е симетрала аголот BAC во триаголникот ABC . Нека M и N се точки од правите AB и AC соодветно такви што $k_1(O_1, R_1)$ и A и D и BC се сечат во точката $k_2(O_2, R_2)$. Докажи дека A .

Решение. Бидејќи триаголниците AND и ADC се слични ($\angle CAD$ е заеднички, $\angle ADN = \angle DCA$ по услов) следува

$$\overline{AD}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{AC} \quad (1)$$

Бидејќи триаголниците AMD и ABD се слични ($\angle BAD$ е заеднички, $\angle ABD = \angle ADM$ по услов) следува

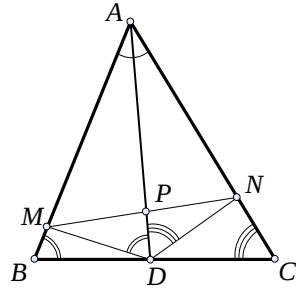
$$\overline{AD}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AB} \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува $\overline{AD}^4 = \overline{AM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}$. За да

важи $\overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}$ доволно е да докажеме дека $\overline{AD} \cdot \overline{AP} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$. Четириаголникот $AMDN$ е тетивен бидејќи

$$\angle MDN + \angle MAN = \angle MDA + \angle ADN + \angle MAN = \angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ.$$

Значи, $\angle ADN = \angle AMN$ (периферни агли над ист кружен лак), па триаголниците AMP и AND се слични. Оттука следува дека $\overline{AD} \cdot \overline{AP} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$.



3Б. Најди ги сите вредности на реалниот број k за кои изразот

$$\sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

не зависи од x .

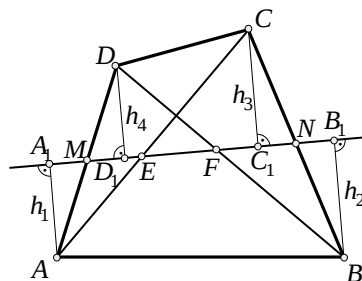
Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
 \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x) &= \\
 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\
 &\quad + k((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) \\
 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + k(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) \\
 &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x + k(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x) = k + 1 - \frac{3+2k}{4} \sin^2 2x.
 \end{aligned}$$

Изразот не зависи од x ако $3+2k=0$, односно за $k=-\frac{3}{2}$.

4Б. Докажи дека отсечката чии крајни точки се средините на спротивните страни на конвексен четириаголник, ги дели неговите дијагонали во ист однос.

Решение. Нека M е средина на отсечката AD , N е средина на BC , E и F се пресечните точки на MN со AC и BD соодветно, A_1, B_1, C_1, D_1 се подножјата на нормалите спуштени на правата MN од темињата A, B, C, D соодветно, и нека h_1, h_2, h_3, h_4 се растојанијата на темињата A, B, C и D од правата MN .



Од складноста на правоаголните триаголници AA_1M и DD_1M ($\angle AMA_1 = \angle DMD_1$ како накрсни агли и $\overline{AM} = \overline{MD}$) следува $h_1 = h_4$, а од складноста на правоаголните триаголници BB_1N и CC_1N ($\angle BNB_1 = \angle CNC_1$ како накрсни агли и $\overline{BN} = \overline{CN}$) следува $h_2 = h_3$. Од сличноста на триаголниците AA_1E и CC_1E следува $\overline{AE} : \overline{EC} = h_1 : h_3$, а од сличноста на триаголниците BB_1F и DD_1F следува $\overline{BF} : \overline{FD} = h_2 : h_4$. Бидејќи $h_1 = h_4$ и $h_2 = h_3$, следува дека $\overline{AE} : \overline{EC} = \overline{BF} : \overline{FD}$.

IV година

1. Краците на произволен прав агол со теме во координатниот почеток ја сечат параболата $y^2 = 2x$ во точките X и Y . Најди го геометриското место од средините на отсечките XY .

Решение. Едниот крак, на пример правата OX , има равенка $y = tx$, $t > 0$. Тогаш равенката на другиот крак, правата OY , е $y = -\frac{1}{t}x$. За координатите на точките X и Y добиваме $X(\frac{2}{t^2}, \frac{2}{t})$ и $Y(2t^2, -2t)$. Средината на отсечката XY да ја означиме со M и нејзините координати се $X(t^2 + \frac{1}{t^2}, \frac{1}{t} - t)$. Да означиме

$x = t^2 + \frac{1}{t^2}$, $y = \frac{1}{t} - t$. Забележуваме дека $y^2 = \frac{1}{t^2} - 2 + t^2 = x - 2$. Значи бараното геометриско место е параболата $y^2 = x - 2$.

2. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се позитивни последователни членови на геометриска прогресија. Ако се познати збирите

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

изрази го производот $a_1 a_2 \dots a_n$ само преку S, T и n .

Решение. Нека $q \neq 1$ е количникот на прогресијата тогаш од $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ добиваме

$$a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = S \quad (1)$$

Од $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ добиваме

$$\frac{1}{a_1} \frac{q^n - 1}{q - 1} \frac{1}{q^{n-1}} = T \quad (2)$$

Од (1) добиваме $\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{S}{a_1}$, па заменувајќи во (2) добиваме $q^{n-1} = \frac{S}{a_1 T}$. Сега

$$a_1 a_2 \dots a_n = a_1^n q^{1+2+3+\dots+n} = a_1^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = a_1^n (q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = a_1^n \left(\frac{S}{a_1 T}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{S^n}{T^n}}$$

Ако $q = 1$, тогаш $na_1 = S$, $\frac{n}{a_1} = T$, па $a_1 = \sqrt{\frac{S}{T}}$. Оттука следува $a_1 a_2 \dots a_n = a_1^n = \sqrt{\frac{S^n}{T^n}}$.

3. Нека AM и BN се тежишните линии во триаголникот ABC и T е нивната пресечна точка. Ако $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$ и точките M, T, N, C лежат на иста кружница, најди ја должината на отсечката AB .

Решение. Нека $\overline{AB} = c$. Ја применуваме косинусната теорема за триаголниците ABC и ABT :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \gamma \quad (1)$$

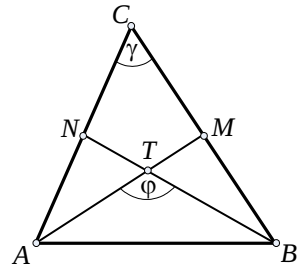
$$c^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 - 2\overline{AT} \cdot \overline{BT} \cdot \cos \varphi \quad (2)$$

Бидејќи четириаголникот $NTMC$ е тетивен, следува дека $\gamma + \varphi = \pi$, а оттука $\cos \varphi = -\cos \gamma$, па од (2) добиваме

$$c^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 + 2\overline{AT} \cdot \overline{BT} \cdot \cos \gamma \quad (3)$$

Триаголниците ATN и AMC се слични (аголот кај темето A им е заеднички и $\angle ATN = \gamma = \angle ACM$), па добиваме:

$$\overline{AN} : \overline{AT} = \overline{AM} : \overline{AC}$$



Бидејќи $\overline{AT} = \frac{2}{3}\overline{AM}$, $\overline{AN} = \frac{b}{2}$, $\overline{AC} = b$, добиваме $\overline{AT} = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Аналогно, $\overline{BT} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Заменувајќи ги овие вредности во (3) добиваме

$$c^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} + 2\frac{ab}{3}\cos\gamma \quad (4)$$

Од (1) и (4) добиваме $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2}{4ab}$, па повторно заменувајќи во (1), $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

4. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\frac{\cos\angle BAC}{\cos\angle ABC} = \frac{7}{15}$. Пресметај $\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}$.

Решение. Нека $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $b = c$. Од косинусната теорема следува

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 1 - \frac{a^2}{2b^2} \quad \text{и} \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a}{2b}.$$

Од условот $\frac{\cos\angle BAC}{\cos\angle ABC} = \frac{7}{15}$ следува

$$\begin{aligned} 0 &= 15\cos\alpha - 7\cos\beta = 15\left(1 - \frac{a^2}{2b^2}\right) - 7\frac{a}{2b} \\ &= -\frac{15}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{7}{2}\frac{a}{b} + 15 = \left(-\frac{5}{2}\frac{a}{b} + 3\right)\left(3\frac{a}{b} + 5\right) \end{aligned}$$

Бидејќи $a, b > 0$, следува $-\frac{5}{2}\frac{a}{b} + 3 = 0$, односно $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$. Од синусната теорема следува дека $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{6}{5}$.

3Б. Најди го членот со најголем коефициент во развојот на биномот

$$(\sqrt{2} + x)^{50}.$$

Решение. Да разгледаме два последователни члена на развојот

$$T_{k+1} = \binom{50}{k} \sqrt{2}^k x^{50-k} = A_{k+1} x^{50-k}, \quad T_k = \binom{50}{k-1} \sqrt{2}^{k-1} x^{50-k+1} = A_k x^{50-k+1}.$$

Да видиме за кои вредности на k односот меѓу коефициентите A_{k+1} и A_k е помал од

1. Од $\frac{\binom{50}{k} \sqrt{2}^k}{\binom{50}{k-1} \sqrt{2}^{k-1}} < 1$ следува $\frac{51-k}{k} \sqrt{2} < 1$, а оттука $k > 51(2 - \sqrt{2}) \approx 29,875$. Почнувајќи од 30-тиот член односот $A_{k+1} : A_k$ е помал од 1, па значи $A_{31} < A_{30}$. Ако $k < 30$ односот $A_{k+1} : A_k$ е поголем од 1, па $A_{30} > A_{29} > A_{28} > \dots$. Значи триесеттиот член има најголем коефициент.

4Б. Нека α , β и γ се аглиите во триаголникот ABC , s е неговиот полупериметар, а R е радиусот на опишаната кружница. Ако важи

$$3R^2(3 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma) = 2s^2$$

докажи дека триаголникот е рамностран.

Решение. Следните равенства се еквивалентни:

$$3R^2 (3 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma) = 2s^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$3R^2 (1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta + 1 - \cos 2\gamma) = 2s^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$3R^2 (2\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) = 2s^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$3R^2 (2\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \beta + 2\sin^2 \gamma) = \frac{(a+b+c)^2}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$3R^2 (4\sin^2 \alpha + 4\sin^2 \beta + 4\sin^2 \gamma) = (a+b+c)^2$$

Од синусната теорема имаме

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

а оттука добиваме

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$$

т.е.

$$a = b = c$$

Значи триаголникот е рамностран.