Сојузен натпревар 1987

I година

1. Докажи дека за ненегативните реални броеви a и b важи неравенството

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a} \ .$$

Решение. Со елементарни трансформации и користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a} &= \frac{a+b}{2}(a+b+\frac{1}{2})-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\ &\geq \sqrt{ab}(a+b+\frac{1}{2})-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\ &= \sqrt{ab}(a+b+\frac{1}{2}-\sqrt{a}-\sqrt{b}) \\ &= \sqrt{ab}((\sqrt{a}-\frac{1}{2})^2+(\sqrt{b}-\frac{1}{2})^2) \geq 0.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=\frac{1}{4}$.

2. Даден е триаголник ABC со тап агол во темето A. Нека $a=BC$, $b=CA$ и h_a, односно h_b, висина од темето A, односно темето B. Докажи дека

$$a+h_a > b+h_b \ .$$

Решение. Нека P е плоштината на триаголникот ABC. Од условотна задачата следува $a>b>h_a$ и $2P=ah_a=bh_b<ab$. Затоа $\frac{2P}{ab}(a-b)<a-b$, од каде следува $h_b-h_a<a-b$, т.е. $b+h_b<a+h_a$.

3. Даден е природен број n. Определи го бројот на решенијата на равенката

$$x^2-[x^2]=(x-[x])^2,$$

за кои $1 \leq x \leq n$.

Решение. Ако ставиме

$$x=m+\alpha, \ m \in \{1,2,...,n-1\}, \ 0 \leq \alpha < 1,$$

дадената равенка го добива видот

$$m^2+2m\alpha=[m^2+2m\alpha+\alpha^2].$$

Според тоа, бројот $m+\alpha$ е решение на дадената равенка ако и само ако $2m\alpha$ е цел број, т.е. ако и само ако

$$\alpha \in \{0,\frac{1}{2m},\frac{2}{2m},...,\frac{2m-1}{2m}\},$$

што значи дека во интервалот $[m.m+1)$ дадената равенка има $2m$ решенија. Бидејќи и $x=n$ е решение на равенката, заклучуваме дека бараниот број решенија на оваа равенка е еднаков на

$$1+2(1+2+...+(n-1))=1+n(n-1)=n^2-n+1\,.$$

4. Секое теме на коцката е означено со еден од броевите 1 или -1, а на секој ѕид е запишан производот на броевите со кои се означени четирите темиња на тој ѕид. Дали збирот на така добиените 14 броеви може да биде еднаков на:

а) 7; б) 0?

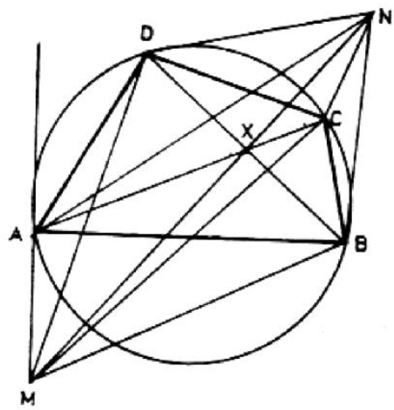
Решение. Ако се смени еден број во теме, се менуваат три броја на ѕидовите на коцката, а збирот се менува за $+8,+4,0,-4,-8$, што значи за број делив со 4. Ако сите темиња се означени со единици, тогаш збирот насите 14 добиени броеви е еднаков на 14.Според тоа, збирот при делење со 4 секогаш дава остаток 2, па затоа не може да биде еднаков ниту на 7, ниту на 0.

II година

1. Докажи дека постојат бесконечно многу прости броеви p такви што равенката $x^2+x+1=py$, по x и y, има целобројни решенија.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат конечно многу прости броеви кои може да се множители на броеви од видот x^2+x+1, каде x е цел број и нека $p_1,p_2,...,p_n$ се сите такви броеви. Последното е противречност, бидејќи во тој случај бројот $(p_1p_2...p_n)^2+p_1p_2...p_n+1$ не е делив со ниту еден прост број.

2. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница, M е пресечната точка на нормалата на AB во A и на нормалата на CD во D, а N е пресечната точка на нормалата на AB во B и на нормалата на CD во C. Докажи дека пресекот на правите AC и BD припаѓа на правата MN.



Решение. Нека X е пресечната точка на отсечките MN и AC, а Y е пресечната точка на отсечките MN и BD и нека, на пример, $\measuredangle BAD<90^\circ$, цртеж десно. (Аналогно се разгледува случајот $\measuredangle BAD>90^\circ$. Ако $\measuredangle BAD=90^\circ$, тогаш $M=D$ и $N=B$, па тврдењето очигледно важи.). Тогаш

$$\frac{MX}{XN}=\frac{P_{AMC}}{P_{ANC}}=\frac{AM\cdot AC\sin\measuredangle MAC}{AC\cdot NC\sin\measuredangle ACN}=\frac{AM\sin(90^\circ+\measuredangle BAC)}{NC\sin(90^\circ+\measuredangle ACD)}\,, \qquad (1)$$

$$\frac{MY}{YN}=\frac{P_{BMD}}{P_{BND}}=\frac{DM\cdot DB\sin\measuredangle MBD}{BN\cdot BD\sin\measuredangle DBN}=\frac{DM\sin(90^\circ-\measuredangle BDC)}{BN\sin(90^\circ-\measuredangle ABD)}=\frac{DM\sin(90^\circ+\measuredangle BAC)}{BN\sin(90^\circ+\measuredangle ACD)}\,, \qquad (2)$$

бидејќи $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD$. Триаголниците BCN и DAM се слични, бидејќи $\measuredangle CNB = \measuredangle AMD$ како агли со паралелни краци и

$$\measuredangle BCN = 360^\circ - 90^\circ - \measuredangle DCB = 270^\circ - (180^\circ - \measuredangle BAD) = 90^\circ + \measuredangle BAD = \measuredangle MAD .$$

Затоа $\frac{NC}{BN} = \frac{AM}{DM}$, т.е.

$$\frac{AM}{NC} = \frac{DM}{BN} . \tag{3}$$

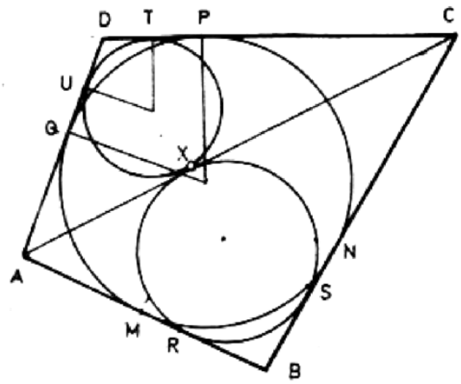
Од (1) , (2) и (3) следува $\frac{MX}{XN} = \frac{MY}{YN}$, т.е.точките X и Y ја делат отсечката MN во еднаков однос. Затоа $X = Y$.

3. Ако во четириаголник може да се впише кружница, докажи:

а) Кружниците впишани во двата триаголници на кои една од дијагоналите го дели четириаголникот меѓусебно се допираат.

б) Допирните точки на тие кружници со страните на дадениот четириаголник се темиња на тетивен четириаголник.

Решение. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник и нека M, N, P, Q се допирните точки на вписаната кружница со страните AB, BC, CD, DA. Нека впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB, BC, CA редоследно во точките R, S, X и нека впишаната кружница во триаголникот ACD ги допира страните AC, CD, DA соодветно во точките X_1, T, U , цртеж десно.



а) Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тангентен, важи

$$AB + CD = BC + AD ,$$

па следува

$$XX_1 = | AX - AX_1 | = | \tfrac{AB+AC-BC}{2} - \tfrac{AC+AD-CD}{2} | = \tfrac{|AB+CD-BC-AD|}{2} = 0 ,$$

т.е. точките X и X_1 се совпаѓаат.

б) Бидејќи $BR = BS$ и $BM = BN$, важи $RS \,||\, MN$. Аналогно $UT \,||\, QP$. Бидејќи $AR = AX = AU$ и $AM = AQ$, важи $QM \,||\, UR$. Аналогно, $PN \,||\, TS$. Бидејќи четириаголникот $MNPQ$ е тетивен, збирот на неговите спротивни агли е еднаков на 180°, а како четириаголникот $RSTU$ има паралелни страни со четириаголникот $MNPQ$, заклучуваме дека збирот на неговите спротивни страни е 180° . Затоа четириаголникот $RSTU$ е тетивен.

4. Нека $P(x)$ е полином од седми степен со целобројни коефициенти, таков што за седум различни цели броеви прима вредности во множеството $\{-1,1\}$. Докажи дека $P(x)$ не може да се претстави како производ на два полиноми со целобројни коефциценти така што ниту еден од нив не е константен полином.

Решение. Нека $P(x)=Q(x)R(x)$, каде $Q(x)$ и $R(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти, при што степенот на полиномот $R(x)$ е помал од четири. Тогаш и полиномот $R(x)$ во секоја од воочените седум точки прима вредности од множеството $\{-1,1\}$, па во четири од тие точки прима иста вредност, на пример 1. Но, тогаш полиномот $R(x)-1$ има четири реални нули, па затоа $R(x)-1\equiv 0$, односно $R(x)\equiv 1$.

III и IV година

1. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви чиј производ е еднаков на 1. Докажи дека

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n)\geq 5^n.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\frac{4+a_i}{5}\geq\sqrt[5]{a_i}$, т.е. $1+a_i\geq 5\sqrt[5]{a_i}>0$, за $i=1,2,...,n$. Ако ги помножиме овие n неравенства добиваме

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n)\geq 5^n\sqrt[5]{a_1a_2...a_n}=5^n,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_i=1$, за $i=1,2,...,n$.

2. Нека a и m се природни броеви и x е цел број таков што m е делител на a^2x-a. Докажи дека постои цел број y, таков што m е делител на броевите a^2y-a и ay^2-y.

Решение. а) Ако $m\mid ax-1$, тогаш за $y=x$ добиваме

$$a^2y-a=a^2x-a=a(ax-1),$$
$$ay^2-y=ax^2-x=x(ax-1),$$

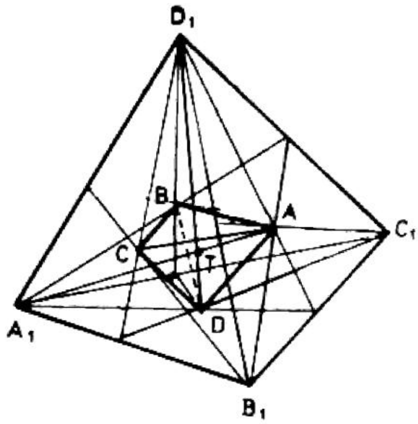
па следува $m\mid a^2y-a$ и $m\mid ay^2-y$.

б) Ако $m\mid a$, тогаш тврдењето важи за $y=m$.

в) Ако $a=km_1, ax-1=lm_2$ и $m=m_1m_2$, каде $k,l,m_1.m_2$ се цели броеви и $m_1>1$, $m_2>1$, тогаш се заемно прости следниве парови броеви a и m_2, m_1 и m_2, am_1 и m_2. Затоа постојат цели броеви r и s такви што $ram_1-1=sm_2$. Нека $y=rm_1$. Тогаш

$$a^2y-a=a(ay-1)=km_1(arm_1-1)=ksm_1m_2=ksm,$$
$$ay^2-y=y(ay-1)=rm_1(arm_1-1)=rsm_2m_1=rsm.$$

3. Во просторот се дадени n точки, такви што било кои четири се темиња на недегенериран тетраедар со волумен не поголем од 1. Докажи дека постои тетраедар со волумен не поголем од 27 кој ги содржи сите дадени точки (во внатрешноста или на ѕидовите).



Решение. Нека $ABCD$ е тетраедар со максимален волумен чии темиња се некои четири од дадените точки. Нека T е тежиштето на тетраедарот $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ е тетраедарот хомотетичен на тетраедарот $ABCD$ во однос на хомотетијата со центар T и коефициент на хомотетијата $k=-3$, цртеж десно. Да забележиме дека тежиштето на тетраедарот ја дели секоја тежишна линија на тетраедарот на два дела, така што делот од темето до тежиштето е три пати подолг од делот од тежиштето на тетраедарот до тежиштето на спротивниот ѕид. Затоа точките A,B,C,D се тежишта на ѕидовите на тетраедарот $A_1B_1C_1D_1$. Волуменот на тетраедарот $A_1B_1C_1D_1$ е 27 пати поголем од волуменот на тетраедарот $ABCD$. Ќе докажеме дека тетраедарот $A_1B_1C_1D_1$ ги содржи сите дадени точки. Доволно е да докажеме дека никои две од дадените точки не се наоѓаат на различни страни на некоја од рамнините $A_1B_1C_1, B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1$. Нека го претпоставиме спротивното. Нека, на пример, точките B и E се на различни страни од рамнината $B_1C_1D_1$. Тогаш висината на тетраедатор $EBCD$ од темето E е поголема од висината на тетраедарот $ABCD$ од темето A, па како овие два тетраедри имаат заедничка основа BCD, добиваме дека волуменот на тетраедарот $EBCD$ е поголем од волуменот на тераедатор $ABCD$, што е противречност.

4. Нека X е множеството од сите конечни низи чии членови се 0 и 1 и функцијата $f: X \to X$ е определена со: за секој $x \in X$ сликата $f(x)$ се добива така што во низата секоја единица се замени со 01, а секоја нула со 10. Колку парови 00 се јавуваат во низата

$$\underbrace{f(f...(f}_{n}(1))...).$$

Решение. Со x_n да го означиме бројот на паровите 00 во низата

$$f^n(1) = \underbrace{f(f...(f}_{n}(1))...) .$$

Од равенствата

$$f(1) = 01,$$
$$f^2(1) = 1001,$$
$$f^3(1) = 01101001,$$
$$f^4(1) = 1001011001101001,$$
$$f^5(1) = 01101001100101101001011001101001,$$

непосредно следува $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 3, x_5 = 5$. Понатаму, да забележиме дека се точни следниве тврдења:

а) Низата $f^k(1)$ содржи 2^k членови.

б) Втората половина на низата $f^{k+1}(1)$ е еднаква на низата $f^k(1)$.

в) Низата $f^{2k}(1)$ е симетрична (првиот член е еднаков на последниот, вториот на претпоследниот итн.), а двата централни члена се 00.

г) Првата половина на низата $f^{2k+1}(1)$ се добива од втората (или од низата $f^{2k}(1)$) кога секоја нула се замени со единица, а секоја единица со нула. Затоа оваа низа содржи еднаков број парови 00 и 11.

д) Бројот на паровите 11 во низата $f^{2k}(1)$ е за еден помал од бројот на паровите 00 во таа низа.

Од наведените својства следува дека за секој природен број k важи

$$x_{2k} = 2x_{2k-1} + 1 \text{ и } x_{2k+1} = 2x_{2k} - 1,$$

па затоа

$$\begin{aligned} x_{2n} &= 2x_{2n-1} + 1 = 2^2 x_{2n-1} - 2 + 1 = 2^3 x_{2n-1} + 4 - 2 + 1 \\ &= ... = 2^{2n-1} x_1 + (2^{2n-2} - 2^{2n-3} + ... + 2^2 - 2 + 1) \\ &= \tfrac{1-(-2)^{2n-1}}{1-(-2)} = \tfrac{2^{2n-1}+1}{3}, \\ x_{2n+1} &= 2\tfrac{2^{2n-1}+1}{3} - 1 = \tfrac{2^{2n}-1}{3}. \end{aligned}$$

Мала олимпијада

1. Нека $x_0 = a, x_1 = b$, каде a и b се цели броеви и

$$x_{n+1} = 2x_n - 9x_{n-1}, \text{ за } n \geq 1.$$

Определи потребен и доволен услов за a и b, при кој постои член на низата кој е делив со 7.

Решение. Да забележиме дека за секој $n \geq 1$ важи

$$x_{n+1} \equiv 2(x_n - x_{n-1}) \pmod 7 . \qquad (1)$$

Ако за некој индекс k важи $7 \mid x_{k+1}$, тогаш од (1) редоследно за $n = k, n = k-1$ и $n = k-2$ добиваме

$$7 \mid x_k - x_{k-1},\ 7 \mid x_{k-1} - 2x_{k-2},\ 7 \mid x_{k-3} .$$

Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека е точно барем едно од следниве четири тврдења:

$$7 \mid a,\ 7 \mid b,\ 7 \mid a-b,\ 7 \mid 2a-b .$$

Лесно се гледа дека во секој од овие случаи бесконечно многу членови на низата се деливи со 7.

Забелешка. Може да се докаже дека за секој $n \in \{0,1,2,...\}$ важи:

$$\begin{aligned} x_n &= a(1 - 8\tbinom{n}{2} + 8^2\tbinom{n}{4} - ...) + (b-a)(\tbinom{n}{1} - 8\tbinom{n}{3} + 8^2\tbinom{n}{5}) - ...) \\ &= a2^{\frac{4}{2}} \cos\tfrac{n\pi}{4} + (b-a)2^{\frac{4}{2}} \sin\tfrac{n\pi}{4}, \end{aligned}$$

од каде што следува бараниот резултат.

2. Нека

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}x + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{-\sqrt{2-\sqrt{2}}x + \sqrt{2+\sqrt{2}}} .$$

Определи

$$\underbrace{f(f...(f}_{1987}(x))...)$$

Решение. На функцијата од видот $f(x) = \frac{ax+b}{-bx+a}$, каде a и b се реални броеви, и го придружуваме комплексниот број $z = a + ib$. Понатаму, ако $f_1(x) = \frac{a_1x+b_1}{-b_1x+a_1}$ и $f_2(x) = \frac{a_2x+b_2}{-b_2x+a_2}$, тогаш

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \frac{(a_1a_2 - b_1b_2)x + (a_1b_2 + b_1a_2)}{-(a_1b_2 + b_1a_2)x + (a_1a_2 - b_1b_2)} .$$

Според тоа, ако на функциите f_1 и f_2 има се придружени комплексните броеви z_1 и z_2, тогаш на функцијата $f_1 \circ f_2$ и е придружен комплексниот број z_1z_2. Бидејќи

$$\cos\tfrac{\pi}{8} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos\tfrac{\pi}{4})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sin\tfrac{\pi}{8} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} ,$$

добиваме дека на дадената функција и е придружен бројот $z = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$. Затоа на функцијата

$$\underbrace{f(f...(f}_{1987}(x))...) = f_{1987}(x)$$

и е придружен бројот $(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})^{1987} = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}$. Но,

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,$$

па затоа

$$f_{1987}(x)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}x+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{-\sqrt{2+\sqrt{2}}x+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\ .$$

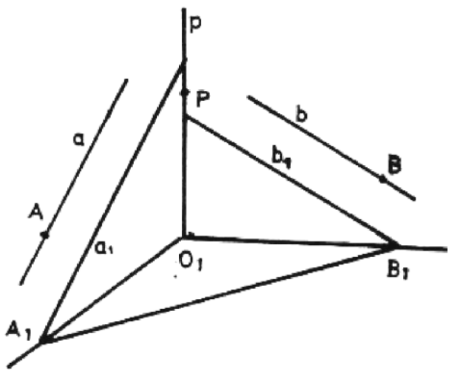
3. Во просторот се дадени прави a,b,c такви што никои две не се меѓусебно паралелни и постојат рамнини α,β,γ така што важи:

$$a\subset\alpha,\ b\subset\beta,\ c\subset\gamma,\ \alpha\perp\beta,\ \beta\perp\gamma,\ \gamma\perp\alpha\ .$$

Конструирај ја пресечната точка на рамнините α,β и γ. (Конструкцијата во простор дозволува поставување прави, рамнини и сфера и транслација за произволен вектор.)

Решение. Да претпоставиме дека за рамнините α,β,γ важи

$$a\subset\alpha,\ b\subset\beta,\ c\subset\gamma,$$
$$\alpha\perp\beta,\ \beta\perp\gamma,\ \gamma\perp\alpha.$$



Нека A_1 и B_1 различни точки од правата c, а a_1 и b_1 прави определени со условите

$$A_1\in a_1\parallel a,\quad B_1\in b_1\parallel b,$$

и α_1 и β_1 се рамнини определени со условите

$$A_1\in\alpha_1\parallel\alpha,\ B_1\in\beta_1\parallel\beta,$$

(цртеж десно). Тогаш рамнините α_1,β_1,γ се заемно нормални, а за заедничката точка O_1 на овие рамнини важи:

а) Точката O_1 припаѓа на сферата S со дијаметар A_1B_1.

б) Точката O_1 припаѓа на рамнините π_1 и π_2 за кои важи $A_1\in\pi_1\perp b_1$, $B_1\in\pi_2\perp a_1$.

Рамнинте α,β,γ за кои важат дадените услови (со тоа и нивната заедничка точка) ги конструираме на следниов начин: Прво конструираме прави a_1 и b_1 кои содржат соодветно произволни точки A_1 и B_1 од правата c такви што важи $A_1\in a_1\parallel a$ и $B_1\in b_1\parallel b$, а потоа рамнини π_1 и π_2 такви што важи $A_1\in\pi_1\perp b_1$ и $B_1\in\pi_2\perp a_1$. Нека правата n е пресек на рамнините π_1 и π_2, а S е сферата со дијаметар A_1B_1. Со O_1 да ја означиме заедничката точка на правата n и сферата S, со α_1,β_1,γ рамнините за кои важи

$$a_1\subset\alpha_1,\ \alpha_1\perp\pi_2,\ b_1\subset\beta_1,\ \beta_1\perp\pi_1,\ c\subset\gamma,\ O_1\in\gamma,$$

со p пресекот на рамнините α_1 и β_1 и со A, B и P редоследно произволни точки од правите a, b и p. Нека α и β се рамнинте кои се добиваат со транслација на рамнините α_1 и β_1 редоследно за векторите $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{B_1B}$. Тогаш α, β и γ се рамнини за кои важат условите на здачата.

Доказ. По конструкција важи $a \subset \alpha,\ b \subset \beta,\ c \subset \gamma$. Бидејќи точката O_1 припаѓа на сферата S со дијаметар A_1B_1, важи $A_1O_1 \perp O_1B_1$, а како правата O_1B_1 припаѓа на рамнината π_2, важи $O_1B_1 \perp a_1$. Според тоа, $O_1B_1 \perp \alpha_1$, а бидејќи $O_1B_1 \subset \beta_1$, добиваме $\beta_1 \perp \alpha_1$. Затоа и $\beta \perp \alpha$. Бидејќи $O_1B_1 \perp \alpha_1$ и $p \subset \alpha_1$, добиваме $O_1B_1 \perp PO_1$. Аналогно добиваме $O_1A_1 \perp PO_1$. Според тоа, правата p е нормална на правите O_1A_1 и O_1B_1 на рамнината γ, па затоа $p \perp \gamma$. Конечно, бидејќи $p \subset \alpha_1$ и $p \subset \beta_1$, следува $\alpha_1 \perp \gamma$, $\beta_1 \perp \gamma$, па важи $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$.

Задачата има две или едно решение во зависност од тоа дали правата n и сферата S имаат две или една заедничка точка.