JMMO 2004

1. Одреди го најмалиот природен број кој е делив со 63 и чиј збир на цифри е еднаков на 63.

   Решение. Најмалиот природен број чиј збир на цифри е 63 е 9999999, но тој не е делив со 7, па не е делив ни со 63. Значи бараниот број треба да биде осумцифрен и притоа треба да го намалиме бројот на деветки бидејќи $7\cdot 9+a>63$, каде a е осмата цифра. Според тоа за цифрите на бројот важи $6\cdot 9+a+b=63$, од каде $a+b=9$. Го бараме најмалиот природен број па нека $a=1$ и $b=8$. Така се добива бројот 18999999. Но, тој не е делив со 7, па не е делив ни со 63. Решение на задачата е бројот 19899999.

2. Правоаголник е поделен со отсечки паралелни со неговите страни на квадрати 1×1. Во секој квадрат е запишан еден број. Збирот на сите броеви во секој ред е 1, а збирот на сите броеви во секоја колона е 2. Дали може плоштината на тој правоаголник да е 2004?

   Решение. Нека m е бројот на редовите, а n е бројот на колоните. Ако плоштината на правоаголникот е 2004, тогаш $mn=2004$ и за вкупниот збир на сите броеви во сите квадратчиња важи $m=2n$. Значи

   $$2n^2=2004\text{, т.е. } n^2=1002.$$

   Бидејќи

   $$31^2=961<1002<1024=32^2$$

   следува дека плоштината на правоаголникот не може да биде 2004.

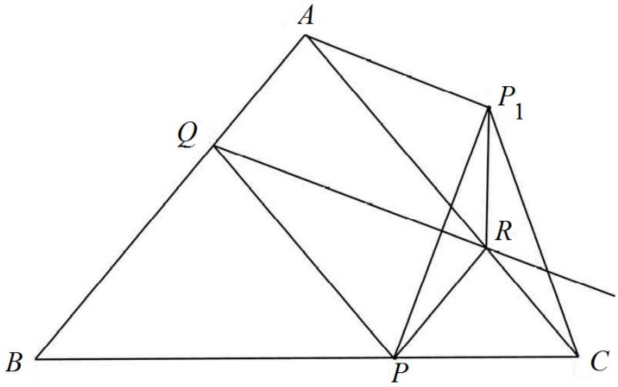
3. Низ точката P која лежи на основата BC на рамнокракиот триаголник ABC, повлечени се прави паралелни со краците на триаголникот. Ако Q и R се пресечните точки на правите со краците AB и AC, соодветно, а P_1 е симетрична точка на P во однос на правата QR, тогаш P_1 лежи на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи!

   Решение. Нека $\overline{PC}<\overline{PB}$. Точките P и A се еднакво оддалечени од правата QR и точките P и P_1 се еднакво оддалечени од правата QR, па затоа $AP_1 \parallel QR$. Бидејќи $\overline{AQ}=\overline{PR}=\overline{P_1R}$, следува дека трапезот QRP_1A е рамнокрак, па затоа $\measuredangle QAP_1=\measuredangle RP_1A$. Триаголникот CRP_1 е рамнокрак, па затоа $\measuredangle RCP_1=\measuredangle RP_1C$. Конечно

   $$\measuredangle QAP_1+\measuredangle BCA+\measuredangle RCP_1=\measuredangle RP_1A+\measuredangle ABC+\measuredangle RP_1C,$$

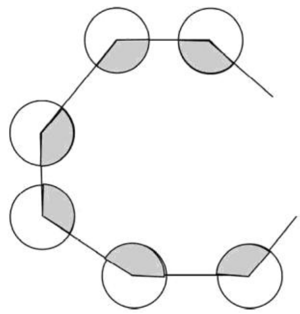
т.е.

$$\measuredangle BAP_1 + \measuredangle BCP_1 = \measuredangle ABC + \measuredangle AP_1C \,.$$



Значи точката P_1 лежи на кружницата опишана околу триаголникот ABC .

4. Даден е конвексен 2004–аголник чии должини на страни се поголеми од 2. Околу секое теме е опишана кружница со радиус 1. Пресметај го збирот на плоштините на деловите од круговите зафатени со внатрешните агли на многуаголникот.



Решение. Збирот на надворешните агли во многуаголник е 2π . Нека $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2004}$ се аглите на многуаголникот и $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{2004}$ се нивните надворешни агли соодветно. Имаме $\alpha_i + \beta_i = \pi$ и $\sum_{i=1}^{2004} \beta_i = 2\pi$. Понатаму,

$$\sum_{i=1}^{2004} (\alpha_i + \beta_i) = 2004\pi \,,$$

па затоа

$$\sum_{i=1}^{2004} \alpha_i = 2004\pi - \sum_{i=1}^{2004} \beta_i = 2002\pi \,.$$

Бараниот збир е

$$P = \sum_{i=1}^{2004} \frac{r^2\alpha_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \alpha_i = 1001\pi \,.$$

5. Даден е конвексен седумнаесетаголник. Сите страни и сите дијагонали на седумнаесетаголникот се обоени со 3 различни бои. Докажи дека

постои триаголник чии страни се обоени со иста боја.

Решение. Од едно теме A може да се повлечат 14 дијагонали и сметајќи ги и страните во тоа теме, вкупно 16 отсечки. Обоени се со три различни бои. Од принципот на Дирихле следува дека постојат 6 отсечки обоени со иста боја 1. Да ги означиме темињата кон кои се повлечени овие отсечки со $B_1, B_2, ..., B_6$. Сега $B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_1B_5$ и B_1B_6 се обоени со некои од трите бои. Ако некоја од овие отсечки е обоена со бојата 1 тогаш постои ваков триаголник. Ако никоја од овие отсечки не е обоена со бојата 1, тогаш од принципот на Дирихле следува дека од петте отсечки постојат барем 3 обоени со иста боја 2. Нека тоа се B_1B_2, B_1B_3 и B_1B_4. Тогаш, ако една од B_2B_3, B_2B_4 и B_3B_4 е обоена со бојата 2, добиваме триаголник со исти бои. Ако сите се обоени со бојата 3, тогаш триаголникот $B_2B_3B_4$ е со бараното својство.