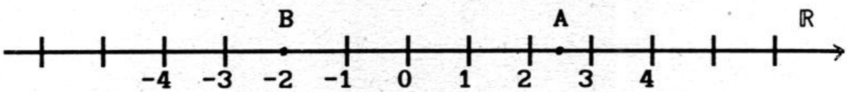
Вангел Каруловски
Душко Ачовски
Скопје

БРОЈНИ ИНТЕРВАЛИ

При изучувањето на математиката се среќаваме со повеќе бројни множества: со множеството $\mathbb{N}$ на природните броеви, со целите броеви $\mathbb{Z}$, со рационалните броеви $\mathbb{Q}$, со ирационалните броеви $\mathbb{I}$, со множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви и др.

Множеството на реалните броеви графички го претставуваме на бројна оска што се вика уште реална бројна оска. Знаеме дека на секој реален број му одговара една точка од бројната оска, односно на секоја точка од бројната оска ѝ одговара еден реален број. Така, на пример, на црт. 1 на реалниот број 2,5 му одговара точката A, и обратно, на точката A ѝ одговара реалниот број 2,5. Кој реален број ѝ одговара на точката B на црт. 1?



Црт. 1

Можат да се формираат разни продмножества на множеството на реалните броеви. Еве некои од нив:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ и $-2 \le x \le 3\}$; $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ и $x < -5\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ и $-2 < x < 3\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ и $x > 2\}$; итн.

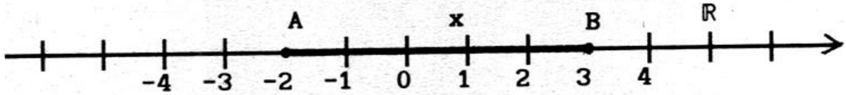
1. На множеството А му припаѓаат сите реални броеви, што се наоѓаат меѓу броевите −2 и 3, заедно со −2 и 3. Ова множество се означува со симболот [−2;3] и се вика затворен интервал или сегмент.

Записите $\{x|x\in\mathbb{R}$ и $-2\le x\le 3\}$ и $[-2;3]$ означуваат едно исто множество и затоа може да се запише:

$$[-2;3] = \{x|x\in\mathbb{R} \text{ и } -2\le x\le 3\};$$

односно $\quad x\in[-2;3] \Leftrightarrow (-2\le x\le 3 \wedge x\in\mathbb{R})$.

На бројната оска (црт.2) ова множество е претставено со затворената отсечка АВ.



Црт. 2

Значи, затворен интервал со почеток a и крај b, каде што $a\le b$, се вика множеството од сите реални броеви x што го задоволуваат условот $a\le x\le b$. Броевите a и b се викаат соодветен лев и десен крај.

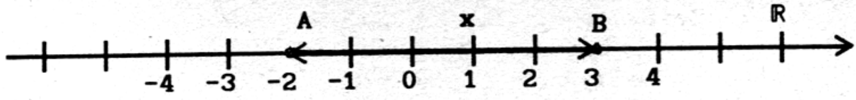
Можеме да запишеме:

$$[a;b] = \{x|x\in\mathbb{R} \text{ и } a\le x\le b\};$$

односно $\quad x\in[a;b] \Leftrightarrow (a\le x\le b \wedge x\in\mathbb{R})$.

2. Ако во затворениот интервела $[a,b]$ се отстранат броевите a и b, тогаш се добива отворен интервал, кој што се означува со $(a;b)$. Според тоа, $(a;b) = \{x|x\in\mathbb{R}$ и $a<x<b\}$; односно $x\in(a;b) \Leftrightarrow (a<x<b \wedge x\in\mathbb{R})$.

На пример, интервалот $(-2,3) = \{x|x\in\mathbb{R}$ и $-2<x<3\}$ графички е прикажан на црт.3. Тоа е отворена отсечка АВ (Отсечка без крајни точки).

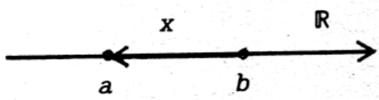


Црт. 3

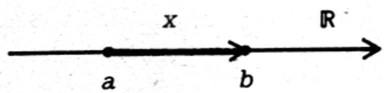
3. Ако од затворениот интервал $[a,b]$ се отстрани само a, или само b, ќе добиеме полузатворен или полуотворен интервал: $(a:b]$ или $[a;b)$. Значи, имаме:

$(a,b] = \{x | x\in\mathbb{R}$ и $a<x\leq b\}$ или $x\in(a,b]\Leftrightarrow(a<x\leq b\wedge x\in\mathbb{R})$ се вика полуотворен од лево (или полузатворен од десно) црт. 4.

$[a,b) = \{x | x\in\mathbb{R}$ и $a\leq x<b\}$ или $x\in[a,b)\Leftrightarrow(a\leq c<b\wedge x\in\mathbb{R})$ и се вика полуотворен од десно (или полуотворен од лево) црт. 5.



Црт 4



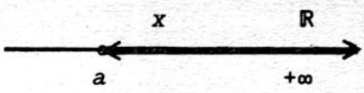
Цер. 5

4. Бесконечни бројни интервали се со краеви симболите $+\infty$, односно $-\infty$. Множеството $\{x | x\in\mathbb{R}$ и $x>a\}$ ги означува сите реални броеви поголеми од реалниот број a. Оваа множество нема најголем реален број, затоа симболично десниот крај го означуваме со симболот $+\infty$ (плус бесконечност).

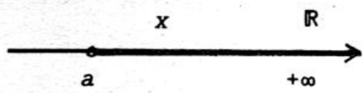
Значи, пишуваме:

$[a+\infty) = \{x | x\in\mathbb{R}$ и $x\geq a\}$ или $x\in[a;+\infty) \Leftrightarrow (x\geq a\ x\in\mathbb{R})$ (црт. 6).

$[a+\infty) = \{x | x\in\mathbb{R}$ и $x>a\}$ или $x\in[a;+\infty) \Leftrightarrow (x>a\ x\in\mathbb{R})$ (црт. 7).



Црт. 6



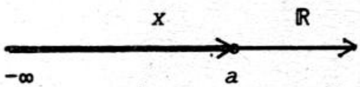
Црт. 7

5. Множеството $\{x|x\in\mathbb{R}$ и $x\leq a\}$ ги означува сите реални броеви помали од a, вклучувајќи го и a. Ова множество нема најмал реален број, затоа симболично левиот крај се означува со симболот $-\infty$ (минус бесконечност).

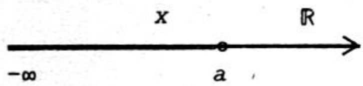
Значи, пишуваме:

$(-\infty, a] = \{x|x\in\mathbb{R}$ и $x\leq a\}$ или $x\in(-\infty; a] \Leftrightarrow (x\leq a\ x\in\mathbb{R})$ (црт. 8).

$(-\infty, a] = \{x|x\in\mathbb{R}$ и $x<a\}$ или $x\in(-\infty; a] \Leftrightarrow (x<a\ x\in\mathbb{R})$ (црт. 9).



Црт. 8



Црт. 9

6. Множеството $\mathbb{R}$ од сите реални броеви го означуваме со интервалот $(-\infty; +\infty)$; т.е.

$$\mathbb{R} = (-\infty; +\infty) = \{x|x\in\mathbb{R} \text{ и } -\infty<x<+\infty\};$$

односно $x\in(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow (-\infty<x<+\infty \wedge x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R})$.

Сигурно забележавте дека на крајот каде што се јавуваат симболите $-\infty$ и $+\infty$ стои само ознаката за отвореност.

Бидејќи бројните интервали се множества, со нив можеме да ги вршиме операциите: унија, пресек, разлика итн.

На пример:

1. $[1, 15]\cap[10; 18] = [10, 15]$;

2. $(-\infty; 4)\cap(1; \infty) = (1, 4)$;

3. $(-\infty; 1)\cap(1, +\infty) = \varnothing$;

4. $(0; 2]\cap[2; 3] = \{2\}$;

5. $(-4; 3)\cup(2; 7) = (-4; 7)$;

6. $(-5; 3)\cup(-7; 4) = (-7; 4)$;

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус