Osječki matematički list 20 (2020), 39-52

Niz stupnjeva grafa

Snježana Majstorović*, Dolores Begović†

Sažetak

U radu proučavamo niz stupnjeva neusmjerenog konačnog jednostavnog grafa. Navodimo dva najpoznatija kriterija koji daju nužne i dovoljne uvjete koje mora zadovoljavati niz nenegativnih cijelih brojeva da bi predstavljao niz stupnjeva nekog grafa, teorem Havela i Hakima te teorem Erdősa i Gallaia. Teorem Havela i Hakima je zasnovan na rezidualnom ostatku najvećeg elementa niza stupnjeva. Na osnovu teorema Havela i Hakima može se razviti algoritam kojim se utvrđuje predstavlja li niz nenegativnih cijelih brojeva niz stupnjeva nekog grafa. Erdős i Gallai su dali nužan i dovoljan uvjet, koji nije algoritamskog tipa, da bi niz bio grafički.

Ključne riječi: *jednostavan graf, niz stupnjeva grafa, grafički niz, Havel-Hakimi teorem, skup stupnjeva*

Degree sequence

Abstract

This paper discusses the degree sequence of a finite simple graph. Two well-known criteria which give the necessary and sufficient conditions for a sequence of nonnegative integers to be a degree sequence of a graph have been proved, the Havel-Hakimi theorem and the Erdős-Gallai theorem. The Havel-Hakimi theorem is based on the residual sequence of the largest element of a degree sequence. Based on the Havel-Hakimi theorem, an algorithm can be developed to determine whether a set of nonnegative integers is a degree sequence. Erdős and Gallai have given a necessary and sufficient condition, which is not of an algorithmic type, for a sequence to be graphic.

Keywords: *simple graph, degree sequence of a graph, graphical sequence, Havel-Hakimi theorem, degree set*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: smajstor@mathos.hr

†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: dbegovic@mathos.hr

1 Osnovni pojmovi i tvrdnje

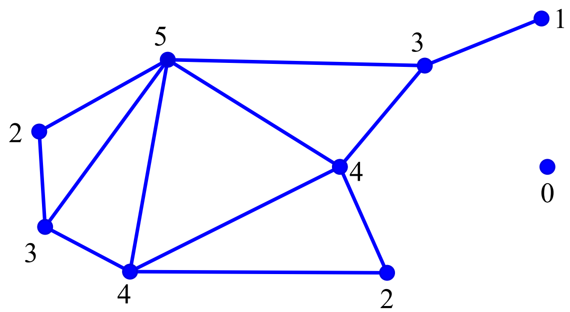
Najprije navedimo osnovne pojmove i tvrdnje iz teorije grafova potrebne za razmatranje stupnjeva grafa.

Neka je V neprazan skup. Označimo s $V_{(2)}$ skup svih neuređenih parova različitih elemenata skupa V.

Definicija 1.1. Jednostavan graf G je uređena trojka $G = (V, E, \psi)$ nepraznog skupa V čiji se elementi zovu vrhovi od G, skupa E čiji se elementi zovu bridovi od G te injektivne funkcije ψ koja svakom bridu u E pridružuje neki element iz $V_{(2)}$. Funkciju ψ zovemo funkcijom incidencije.

Kako ćemo se u ovom radu baviti samo jednostavnim grafovima, to ćemo jednostavni graf zvati kratko graf. Prema definiciji 1.1 jasno je da u jednostavnom grafu nikoja dva vrha nisu spojena s više bridova i ne postoji brid koji spaja vrh sa samim sobom.
S obzirom na to da promatramo konačne grafove, za graf G možemo pisati $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.
$|V| = n$ (broj vrhova) se zove red grafa G, a $|E| = m$ (broj bridova) veličina grafa G. Uz takve specifikacije broja vrhova i bridova, graf G ćemo zvati (n,m) graf. Ako je G (n, m) graf, tada vrijedi $n \geq 1$ i $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$.

Ako funkcija incidencije bridu e pridružuje $\{u, v\}$, onda kažemo da je svaki od vrhova u i v incidentan s bridom e, odnosno vrhovi u i v su spojeni bridom e i pišemo $e = uv$ ili $e = vu$. Također, kažemo da su vrhovi u i v susjedni vrhovi.
U grafu G stupanj vrha v je broj bridova grafa G koji su incidentni s vrhom v i označava se s $d(v)$ ili $d(v|G)$, dakle $d(v) = |\{e \in E : e = uv, \textit{za } u \in V\}|$.
Broj $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ se zove *minimalni stupanj* grafa G.
Broj $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ se zove *maksimalni stupanj* grafa G.



Slika 1. Primjer jednostavnog grafa s navedenim stupnjevima vrhova

Primjer 1.1. Graf G na slici 1 je primjer jednostavnog grafa. Za G vrijedi $n = 9, m = 12, \delta(G) = 0, \Delta(G) = 5$, a suma stupnjeva svih njegovih vrhova je 24.

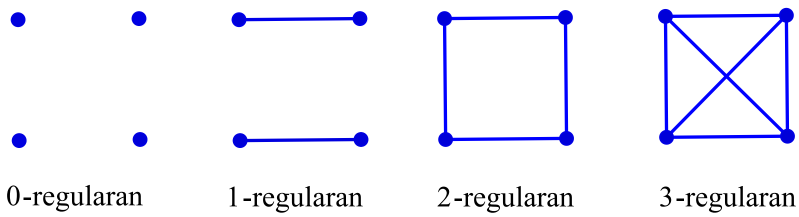
Spomenut ćemo sljedeće važne tvrdnje.

Teorem 1.1. Suma stupnjeva grafa je paran broj koji je jednak dvostrukom broju bridova.

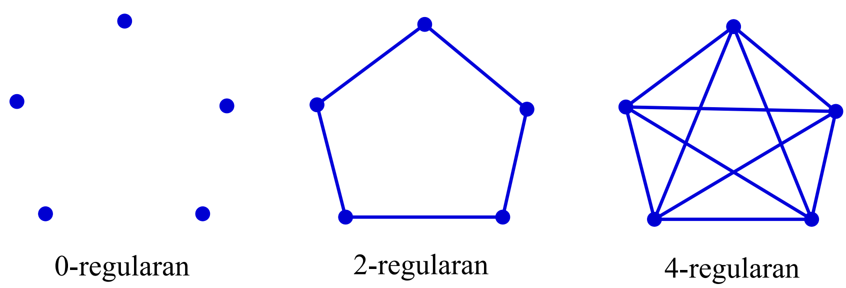
Teorem 1.2. Za svaki graf G reda n je $\Delta(G) \leq n - 1$.

Dakle, vrijedi $0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1$ za svaki graf G reda n. Ako je $\delta(G) = \Delta(G)$, tada vrhovi od G imaju isti stupanj i G se naziva *regularni* graf.

Ako je $d(v) = r$ za svaki vrh v od G, gdje je $0 \leq r \leq n - 1$, tada je G *r-regularan* ili *regularan stupnja r*. Jedini regularni grafovi reda 4 su prikazani na slici 2, a jedini regularni grafovi reda 5 prikazani su na slici 3.



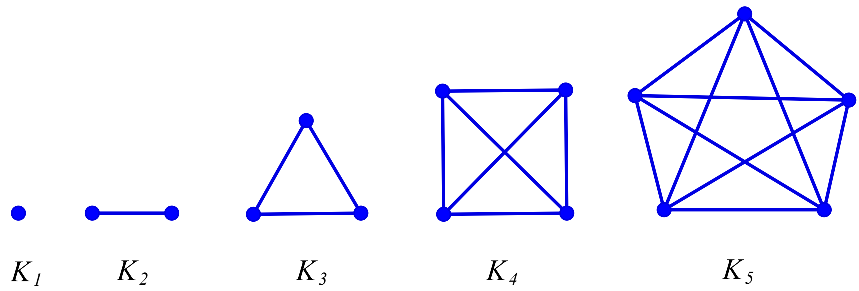
Slika 2. Regularni grafovi reda 4



Slika 3. Regularni grafovi reda 5

Za graf kažemo da je *potpun* ako su svaka dva njegova vrha susjedna. Potpun (n, m) graf je prema tome, regularan graf stupnja $(n - 1)$ i za koji je

$m = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Takav graf ćemo označavati s K_n. Neki primjeri potpunog grafa prikazani su na slici 4.



Slika 4. Potpuni grafovi

Komplement grafa G je graf $\overline{G}$ čiji je skup vrhova $V(G)$ i takav da je za svaki par u, v različitih vrhova G, uv brid u $E(\overline{G})$ ako i samo ako uv nije brid u $E(G)$. Može se pokazati ako je G (n, m) graf, onda je graf $\overline{G}$ reda n i veličine $\binom{n}{2} - m$.

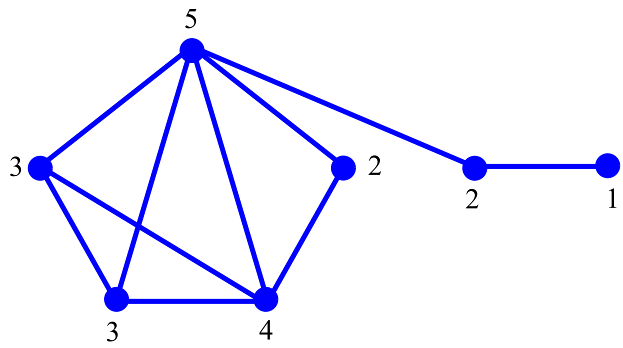
Neka je $G = (V, E, \psi)$ graf i neka je $F \subseteq E$. Za graf sa skupom vrhova V i skupom bridova $E - F$ (razlika skupova E i F) kažemo da se dobiva iz G uklanjanjem bridova skupa F. Taj graf se označava s $G - F$. Ako se F sastoji od jednog brida e od G, tada se graf dobiven uklanjanjem brida e označava s $G - e$.

2 Niz stupnjeva grafa

U ovom poglavlju navest ćemo definiciju niza stupnjeva grafa i dati primjere grafa i pridruženog mu niza stupnjeva.

Definicija 2.1. Neka su d_i, $0 \leq i \leq n-1$, stupnjevi vrhova v_i grafa G u bilo kojem poretku. Niz $[d_i]_1^n$ se zove *niz stupnjeva grafa* G.
Nenegativan niz $[d_i]_1^n$ cijelih brojeva se zove *grafički* niz ako postoji graf G čiji je to niz stupnjeva, a za G se tada kaže da *realizira* niz.

Primjer 2.1. Za graf na slici 5 niz stupnjeva je $D = [1, 2, 2, 3, 3, 4, 5]$.



Slika 5. Graf s nizom stupnjeva $D = [1, 2, 2, 3, 3, 4, 5]$

Definicija 2.2. Za dva grafa s istim nizom stupnjeva kažemo da su *ekvivalentni po stupnjevima*.

Definicija 2.3. Ako je niz stupnjeva zapisan kao nepadajući niz pozitivnih brojeva $d_1^{n_1}, d_2^{n_2}, \ldots, d_k^{n_k}$, $(d_1 < d_2 < \ldots < d_k)$, niz $n_1, n_2, \ldots, n_k$ se zove *niz frekvencija* grafa.

Niz stupnjeva zadanog grafa je lako odrediti. Promotrimo sada pod kojim je uvjetima zadani niz $d_1, d_2, \ldots, d_k$ niz stupnjeva nekog grafa, odnosno grafički niz.

Npr. niz $[1, 2, 2, 3, 3, 4, 5]$ je grafički niz (slika 5). Niz $[1, 1, 4]$ sigurno nije grafički jer nijedan graf s tri vrha ne može sadržavati vrh stupnja četiri.

Postoje neki očiti nužni uvjeti da bi niz $[d_i]_1^n$ nenegativnih cijelih brojeva bio grafički. Dva uvjeta koja impliciraju teoremi 1.1 i 1.2

- $d_i \leq n - 1$ za svaki i, $(1 \leq i \leq n)$
- $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ je paran broj

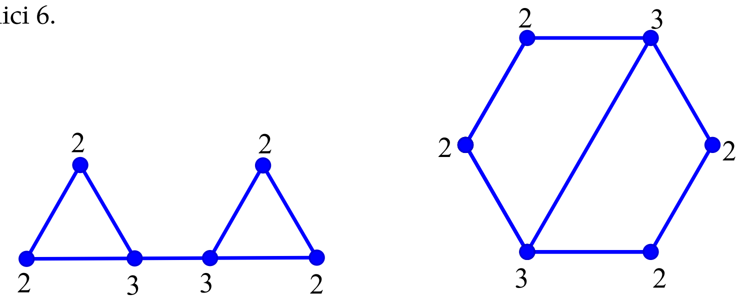
su nužni da bi $[d_i]_1^n$ bio niz stupnjeva grafa, ali oni nisu dovoljni da se utvrdi da je niz nenegativnih cijelih brojeva niz stupnjeva grafa kako i pokazuje primjer 2.2.

Primjer 2.2. Neka je dan niz $[1, 2, 3, 4, \ldots, 4, n-1, n-1]$. Suma elemenata niza je paran broj i $\Delta = n - 1$. Međutim, to nije niz stupnjeva grafa jer bi za takav graf G dva vrha bila stupnja $n - 1$ pa bi prema tome svaki od ta dva vrha bili spojeni sa svim ostalim vrhovima grafa G i prema tome je $\delta \geq 2$. No, najmanji element u danom nizu je 1.

Zadatak 2.1. Je li niz $[6, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2]$ grafički?

Rješenje. Budući da niz ima neparan broj nenegativnih neparnih brojeva, niz ne može biti niz stupnjeva grafa jer bi u suprotnom za takav graf suma stupnjeva bila neparan broj, što je u kontradikciji s teoremom 1.1. Stoga niz nije grafički. ◀

Jasno je da svaki graf ima točno jedan niz stupnjeva, ali obratno ne vrijedi. Nije neobično da grafički niz bude niz stupnjeva više različitih grafova. Npr. niz $[2, 2, 2, 2, 3, 3]$ je niz stupnjeva dva različita grafa prikazana na slici 6.

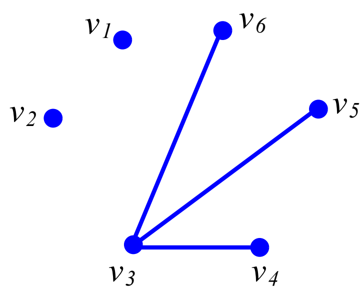


Slika 6. Grafovi s istim nizom stupnjeva

Definirajmo sada rezidualni ostatak.

Definicija 2.4. Neka je $D = [d_i]_1^n$ niz nenegativnih cijelih brojeva i neka je $1 \leq k \leq n$. Neka je $D' = [d'_i]_1^n$ niz dobiven iz D stavljanjem $d_k = 0$ i $d'_i = d_i - 1$ za d_k najvećih elemenata od D različitih od d_k. Neka je H_k graf dobiven od skupa vrhova $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ spajanjem v_k s d_k vrhova koji odgovaraju d_k elementima korištenim za dobivanje D'. Ova operacija dobivanja D' i H_k se zove *otpuštanje* d_k, D' se zove *rezidualni ostatak*, a H_k podgraf dobiven ispuštanjem d_k.

Primjer 2.3. Neka je $D = [2, 2, 3, 3, 4, 4]$. Uzmimo $d_3 = 0$. Tada je $D' = [2, 2, 0, 2, 3, 3]$. Podgraf H_3 za ovaj slučaj je prikazan na slici 7.



Slika 7. Podgraf H_3 dobiven ispuštanjem $d_3 = 3$

3 Kriteriji za niz stupnjeva grafa

U ovom poglavlju razmatrat ćemo kriterije prema kojima dani niz nenegativnih cijelih brojeva predstavlja niz stupnjeva nekog grafa. U literaturi se može naći više kriterija. U [6] je dokazana ekvivalencija sedam kriterija kojima se utvrđuje je li neki niz grafički niz.

Među najpoznatije kriterije ubrajaju se dva kojima su iskazani nužni i dovoljni uvjeti. Prvi su neovisno otkrili V. Havel i S. L. Hakimi, a drugi su otkrili P. Erdős i T. Gallai. Iako su Havel i Hakimi neovisno jedan o drugome dokazali i objavili zasebno radove šezdesetih godina prošlog stoljeća, ovaj teorem je u literaturi poznat kao Havel-Hakimi teorem. Havel i Hakimi su dali nužne i dovoljne uvjete za niz stupnjeva u terminima otpuštanja najvećeg broja u nizu. Nužne i dovoljne uvjete za proizvoljno otpuštanje dali su D. L. Wang i D. J. Kleitman 1973. godine.

3.1 Havel-Hakimi teorem

Navest ćemo dokaz poznatog teorema Havela i Hakima korištenjem kojeg se može efikasno odrediti je li dani niz grafički, odnosno je li to niz stupnjeva nekog grafa ([2]).

Teorem 3.1. ***(Havel-Hakimi)*** Niz nenegativnih cijelih brojeva $s : [d_i]_1^n$ takav da je $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, $n \geq 2$, $d_1 \geq 1$ je grafički ako i samo ako je niz

$$s_1 : d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

grafički.

Dokaz. Pretpostavimo da je niz s_1 grafički. Tada postoji graf G_1 reda $n-1$ takav da mu je s_1 niz stupnjeva. Dakle, vrhovi grafa G_1 se mogu označiti kao $v_2, v_3, \ldots, v_n$ tako da je

$$d(v_i) = \begin{cases} d_i - 1, & 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i, & d_1 + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Sada možemo konstruirati novi graf G dodavanjem vrha v_1 i d_1 bridova $v_1 v_i$, $2 \leq i \leq d_1 + 1$. Tada za G vrijedi, $d(v_i) = d_i$ za $1 \leq i \leq n$ i niz $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ je grafički.

Obratno, neka je niz s grafički. Tada postoje grafovi reda n čiji je niz stupnjeva s. Od svih takvih grafova neka je G takav da je $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $d(v_i) = d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ i suma stupnjeva vrhova incidentnih s vrhom v_1 maksimalna. Pokazat ćemo najprije da je v_1 susjedan vrhovima čiji su stupnjevi $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$.

Pretpostavimo suprotno, neka v_1 nije susjedan vrhovima stupnja $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$. Tada postoje vrhovi v_r i v_s takvi da je $d_r > d_s$ i v_1 je susjedan vrhu v_s, a nije susjedan vrhu v_r. Kako je stupanj vrha v_r veći od stupnja vrha v_s, to postoji vrh v_t tako da je v_t susjedan vrhu v_r, ali nije susjedan vrhu v_s. Uklanjanjem bridova v_1v_s, v_rv_t i dodavanjem bridova v_1v_r, v_sv_t dobit ćemo graf G' koji ima isti niz stupnjeva kao graf G. Međutim, za G' suma stupnjeva vrhova incidentnih s v_1 bit će veća nego za graf G, što je u kontradikciji s izborom grafa G.

Dakle, v_1 je susjedan vrhovima čiji su stupnjevi $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$ i graf $G - v_1$ ima niz stupnjeva s_1, pa je s_1 grafički. □

Teorem 3.1 daje algoritam za utvrđivanje je li dani konačni niz nenegativnih cijelih brojeva niz stupnjeva nekog grafa. Ako nakon ponovljene primjene teorema 3.1 dolazimo do niza čiji su svi elementi jednaki 0, tada je taj niz grafički. Ako na kraju dobijemo niz čiji su neki elementi negativni brojevi, tada taj niz nije grafički.

Primjena teorema 3.1 ilustrirana je na primjeru 3.1.

Primjer 3.1. Je li dani niz brojeva

$$s : 7, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1 \tag{1}$$

niz stupnjeva grafa?

Rješenje. Nakon primjene teorema 3.1 dobivamo niz

$$s'_1 : 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1.$$

Preslagivanjem članova dobivamo

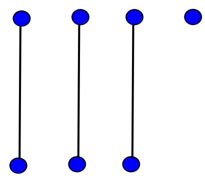
$$s_1 : 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1.$$

Nastavljajući dalje imamo

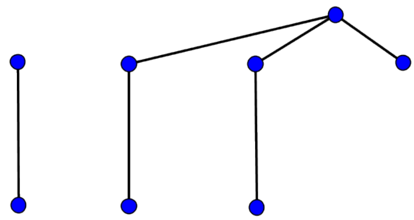
$$\begin{aligned}
s'_2 &: 3, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1\\
s_2 &: 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\\
s'_3 &: 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1\\
s_3 &: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0\\
s'_4 &: 0, 1, 1, 1, 1, 0\\
s_4 &: 1, 1, 1, 1, 0, 0\\
s'_5 &: 0, 1, 1, 0, 0\\
s_5 &: 1, 1, 0, 0, 0\\
s'_6 = s_6 &: 0, 0, 0, 0.
\end{aligned}$$

Prema teoremu 3.1 niz s je grafički niz. ◄

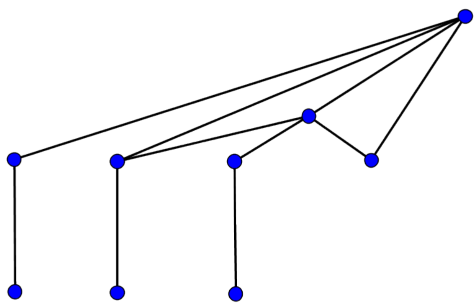
U primjeru 3.1 niz dan s (1) je grafički. Ustanovi li se prije s_6 da je neki niz grafički, može se, prema teoremu 3.1 tvrditi da je i niz s grafički.
Npr. očito je da je niz s_3 grafički jer je to niz grafa prikazanog na slici 8. Prema teoremu 3.1 i nizovi s_2 i s_1 bit će grafički. Konstruirajmo graf G_3 koji realizira niz stupnjeva s_3 (ili s_3') (slika 8). Dodajući novi vrh i bridove dobivamo graf G_2 s nizom stupnjeva s_2 (ili s_2') (slika 9). Nastavljajući dalje, od G_2 dodavanjem novih vrhova i bridova dobivamo graf G_1 čiji je niz stupnjeva s_1 (ili s_1') (slika 10). Konačno, dodavanjem vrhova i bridova grafu G_1 dobivamo graf G, prikazan na slici 11.



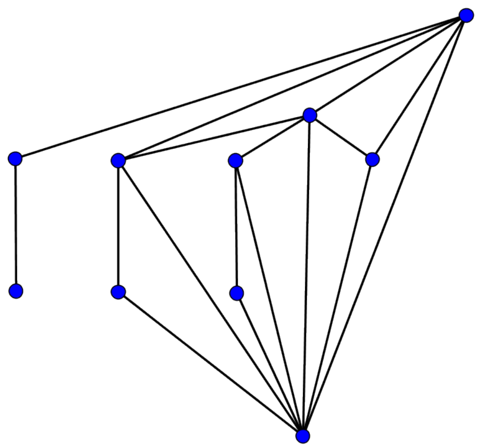
Slika 8. G_3



Slika 9. G_2



Slika 10. G_1



Slika 11. G

Napomenimo da graf na slici 11 nije jedini graf s nizom stupnjeva (1). Postoje grafovi koji ne mogu biti konstruirani metodom korištenom za konstrukciju grafa G na slici 11.

Primjer 3.2. Je li dani niz brojeva $s : 8, 7, 6, 6, 5, 3, 2, 2, 2, 1$ grafički niz?

Rješenje. Nakon primjene teorema 3.1 dobivamo niz

$$s_1 : 6, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1, 1.$$

Nastavljajući dalje imamo

$$s_2' : 4, 4, 3, 1, 0, 0, 1, 1.$$

Preslagivanjem članova dobivamo

$$s_2 : 4, 4, 3, 1, 1, 1, 0, 0.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} s_3' &: 3, 2, 0, 0, 1, 0, 0 \\ s_3 &: 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0 \\ s_4 &: 1, 0, -1, 0, 0, 0. \end{aligned}$$

Dakle, niz s nije grafički niz. ◀

Primjer 3.3. Dokazati da za svaki cijeli broj x, $0 \leq x \leq 5$ niz $[x, 1, 2, 3, 5, 5]$ nije grafički.

Rješenje. Ako postoji graf G s nizom stupnjeva $[x, 1, 2, 3, 5, 5]$, tada je red od G jednak 6. Budući da postoje dva vrha stupnja 5, slijedi da je $\delta(G) \geq 2$ i tako nijedan vrh u G nema stupanj 1. ◀

Zadatak 3.1. Je li niz $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8]$ grafički niz?

Dok su Havel i Hakimi neovisno otkrili nužne i dovoljne uvjete za niz stupnjeva u terminima otpuštanja najvećeg broja u nizu, Wang i Kleitman su dokazali nužne i dovoljne uvjete za proizvoljno otpuštanje. U [10] se može naći dokaz sljedeće tvrdnje.

Teorem 3.2. Niz nenegativnih cijelih brojeva je grafički ako i samo ako je rezidualni dio, dobiven otpuštanjem bilo kojeg nenul elementa niza, grafički.

3.2 Teorem Erdősa i Gallaia

Sljedeći rezultat je kombinatorno karakteriziranje niza stupnjeva. Radi se o teoremu Erdősa i Gallaia koji je najpoznatija eksplicitna karakterizacija niza stupnjeva. Postoji više dokaza ove tvrdnje. U [8] je dan direktan dokaz koji daje konstrukciju niza koji realizira dani niz stupnjeva.

Teorem 3.3. ***(Erdős–Gallai)*** Niz nerastućih nenegativnih cijelih brojeva $D = [d_i]_1^n$ je grafički ako i samo ako je njegova suma paran broj i za svaki k, $1 \leq k \leq n$, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \ \leq \ k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i). \tag{2}$$

Dokaz. Nužnost je očigledna: svaki brid se broji dva puta te se tako dobije parna suma, a desna strana nejednakosti (2) je maksimalni doprinos sumi prvih k stupnjeva od bridova induciranih odgovarajućim vrhovima i bridovima do preostalih vrhova.

Dokažimo sada dovoljnost. Neka je graf s vrhovima $v_1, \ldots, v_n$ podrealizacija nepadajućeg niza $[d_1, \ldots, d_n]$ tako da je $d(v_i) \leq d_i$ za $1 \leq i \leq n$. Za dani niz stupnjeva $[d_1, \ldots, d_n]$ s parnom sumom koji zadovoljava (2) konstruiramo realizaciju kroz uzastopne podrealizacije. Početna podrealizacija ima n vrhova i nema bridova.

Za podrealizaciju, kritički indeks r je najveći indeks takav da je $d(v_i) = d_i$ za $1 \leq i < r$. Na početku, $r = 1$ osim ako imamo nul niz, u tom slučaju postupak je završen. Dok je $r \leq n$, mi imamo novu podrealizaciju s manjom razlikom $d_r - d(v_r)$ za vrh v_r, pri čemu stupnjevi bilo kojeg vrha v_i, $i < r$ ostaju nepromijenjeni (niz stupnjeva raste leksikografski). Ovaj postupak prestaje samo kada je podrealizacija baš realizacija niza stupnjeva D.

Neka je $S = \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$. Zadržavamo uvjet da je skup S nezavisan, koji je sigurno vrijedio na početku (za skup S kažemo da je *nezavisan* ako niti jedan par vrhova iz S nisu spojeni bridom). Koristit ćemo oznaku $v_i \leftrightarrow v_j$ kada je $v_i v_j \in E(G)$, inače ćemo označavati $v_i \not\leftrightarrow v_j$.

Slučaj (0) $v_r \not\leftrightarrow v_i$ za neki vrh v_i tako da je $d(v_i) < d_i$. Dodajmo brid $v_r v_i$.

Slučaj (1) $v_r \not\leftrightarrow v_i$ za neki i, uz $i < r$. Kako je $d(v_i) = d_i \geq d_r > d(v_r)$, postoji $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup v_r)$, gdje je $N(x) = \{y : x \leftrightarrow y\}$. Ako je $d_r - d(v_r) \geq 2$, zamijenimo uv_i s $\{uv_r, v_i v_r\}$.

Ako je $d_r - d(v_r) = 1$, tada jer je $\sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$ paran broj, postoji indeks k, $k > r$ takav da $d(v_k) < d_k$. Slučaj (0) se primjenjuje osim ako je $v_r \leftrightarrow v_k$; zamijenimo $\{v_r v_k, uv_i\}$ s $\{uv_r, v_i v_r\}$.

Slučaj (2) $v_1, \ldots, v_{r-1} \in N(v_r)$ i $d(v_k) \neq \min\{r, d_k\}$ za neki k, $k > r$. U podrealizaciji $d(v_k) \leq d_k$. Kako je S nezavisan skup, $d(v_k) \leq r$. Odavde $d(v_k) < \min\{r, d_k\}$, i primijenimo slučaj (0) osim ako je $v_k \leftrightarrow v_r$. Kako je $d(v_k) < r$, postoji i, $i < r$ takav da je $v_k \not\leftrightarrow v_i$. Kako je $d(v_i) > d(v_r)$, postoji $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup v_r)$. Zamijenimo uv_i s $\{uv_r, v_i v_k\}$.

Slučaj (3) Neka je $v_1, \ldots, v_{r-1} \in N(v_r)$ i $v_i \not\leftrightarrow v_j$ za neki i i j, $i < j < r$. Slučaj (1) primijenimo osim ako je $v_i, v_j \in N(v_r)$. Kako je $d(v_i) \geq d(v_j) > d(v_r)$, postoji $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup v_r)$ i $w \in N(v_j) - (N(v_r) \cup v_r)$ (moguće $u = w$). Kako je $u, w \notin N(v_r)$, primijenimo slučaj (1) osim ako je $u, w \in S$. Zamijenimo $\{uv_i, wv_j\}$ s $\{v_i v_j, uv_r\}$.

Ako se nijedan od slučajeva ne može primijeniti, tada su $v_1, \ldots, v_r$ u parovima susjedni, i $d(v_k) = \min\{r, d_k\}$, $k > r$. Kako je S nezavisan, $\sum_{i=1}^{r} d_i = r(r-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{r, d_k\}$. Prema (2) $\sum_{i=1}^{r} d_i$ je ograničena odozgo. Odavde slijedi da smo već eliminirali deficit od r. Povećamo r za 1 i nastavimo. □

Primjer 3.4. Niz $[6, 6, 5, 4, 3, 2, 2]$ nije grafički jer nejednakost (2) ne vrijedi za $k = 3$.

4 Skup stupnjeva grafa

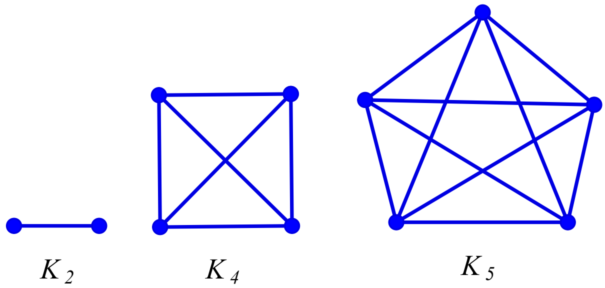
Kada razmatramo niz stupnjeva grafa, osim stupnjeva, zanimaju nas i frekvencije. Ako izostavimo frekvencije, dolazimo do pojma skupa stupnjeva grafa koji će biti uveden sljedećom definicijom.

Definicija 4.1. Skup svih različitih nenegativnih cijelih brojeva koji se pojavljuju u nizu stupnjeva grafa naziva se *skup stupnjeva*.
Skup različitih nenegativnih cijelih brojeva naziva se skup stupnjeva ako postoji graf čiji je to skup stupnjeva, a za graf se kaže da *realizira* zadani skup.

Za dani graf G skup stupnjeva ćemo označavati s $\mathcal{D}(G)$.

Primjer 4.1. Za zadani niz stupnjeva $D = [3,3,3,4,4,5]$, skup stupnjeva je $\mathcal{D}(G) = \{3,4,5\}$.

Neka je $S = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ skup različitih nenegativnih cijelih brojeva. Najjednostavniji primjer grafa G koji realizira S je $G = K_{d_1+1} \cup K_{d_2+1} \cup \ldots \cup K_{d_k+1}$ i graf G ima $d_1 + d_2 + \ldots + d_k + k$ vrhova. Ovdje se radi o disjunktnoj uniji grafova. To je operacija kojom se iz dva ili više grafova dobiva novi graf. Analogna je disjunktnoj uniji skupova. Skup vrhova rezultirajućeg grafa jednak je disjunktnoj uniji vrhova zadanih grafova, a skup bridova novog grafa jednak je disjunktnoj uniji bridova zadanih grafova. Bilo koje disjunktna unija dvaju ili više nepraznih grafova je nepovezan graf.



Slika 12. Graf čiji je skup stupnjeva $S = \{1,3,4\}$

Primjer 4.2. Neka je $S = \{1,3,4\}$. Tada je $G = K_2 \cup K_4 \cup K_5$ (slika 12).

U [7] je dokazana tvrdnja o najmanjem redu grafa za dani skup stupnjeva.

Teorem 4.1. (***Kapoor, Polimeni, Wall***) Za svaki konačni skup pozitivnih cijelih brojeva S s najvećim elementom M, postoji graf G za koji je $\mathcal{D}(G) = S$. Najmanji red takvog grafa G, čiji je skup stupnjeva S je $M + 1$.

Dokaz. Ako je S skup stupnjeva grafa G s p vrhova, tada za postojanje vrha sa stupnjem M mora vrijediti $p \geq M + 1$. Da bismo dovršili dokaz, dokazat ćemo egzistenciju grafa s $M + 1$ vrhova čiji je skup stupnjeva skup S. Neka G_S označava bilo koji graf čiji je skup stupnjeva S. Dokaz ćemo provesti indukcijom po broju elemenata skupa S.
Ako je $S = \{a_1\}$, tada je $G_S = K_{a_1+1}$, potpun graf s $a_1 + 1$ vrhova, jedina mogućnost.
Pretpostavimo da rezultat vrijedi za sve skupove čiji je broj elemenata manji od n. Promotrimo skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$, $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n+1}$, $M = a_1$. Za $T = \{a_1 - a_{n+1}, a_1 - a_n, \ldots, a_1 - a_2\}$, prema pretpostavci

indukcije, postoji graf G_T s $a_1 - a_{n+1} + 1$ vrhova čiji je skup stupnjeva skup T. Dodajmo a_{n+1} izoliranih vrhova ovom grafu. Komplement dobivenog grafa ima $M + 1$ vrhova i skup S je njegov skup stupnjeva. $\square$

Literatura

[1] D. Begović, *Niz stupnjeva grafa*, završni rad, Odjel za matematiku, 2019.

[2] C. Chartrand & L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*, Chapman, Hall, 1996.

[3] C. Chartrand, P. Zhang, *A First Course in Graph Theory*, Dover Publications, 2012.

[4] O. Favaron, M. Mahéo and J. Saclé, *On the residue of a graph*, J. Graph Theory, **15** (1991), 39–64.

[5] A. Dharwadker, S. Pirzada, *Graph theory*, Institute of Mathematics, India, 2011.

[6] G. Sierksma , H. Hoogeveen, *Seven Criteria for Integer Sequences Being Graphic*, Journal of Graph Theory, **15**(2) (1991), 223–231.

[7] A. Tripathi & S. Vijay, *A short proof of a theorem on degree sets of graphs,* Discrete Applied Mathematics, **155** (2007), 670–671.

[8] A. Tripathi, S. Venugopalan, D. B. West, *A short constructive proof of the Erdős–Gallai characterization of graphic lists*, Discrete Mathematics, **310** (2010), 843–844.

[9] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb 2001.

[10] `http://compalg.inf.elte.hu/~tony/Oktatas/TDK/FINAL/Chap%202.PDF`