Самоил Малчески
Скопје

ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

Теоријата на броеви е најомилената гранка кај математичките аматери, но истовремено таа предизвикала и бројни заблуди и неуспеси и кај најголемите математичари. Притоа, со сигурност може да се каже дека прашањето за наоѓање на што е можно поголем прост број, и воопшто проучувањето на простите броеви привлекувало огромно внимание кај многу математичари. Но, што е тоа прост број?

За природниот број p ќе велиме дека е *прост* ако има точно два природни делители. За природниот број n кој има повеќе од два прости делители ќе велиме дека е *сложен*.

Понатаму, секој природен број $n>1$ има најмалку два природни делители 1 и n, што значи дека секој природен број $n>1$ е прост или сложен. Меѓутоа, бројот 1 има точно еден прироседн делител, па затоа тој не е прост и не е сложен број. Според тоа, множеството природни броеви е поделено на три дисјунктни множества и тоа: прости броеви, сложени броеви и бројот 1.

Во продолжение ќе се задржиме на некои прашања во врска со простите и сложените броеви. Притоа сметаме дека читателот е запознаен со поимот за деливост, општите и посебните признаци за деливост, делењето со остаток, најголемиот заеднички делител (НЗД), најмалиот заеднички содржател (НЗС) и Евклидовиот алгоритам за наоѓање на НЗД.

1. БЕСКОНЕЧНОСТ НА МНОЖЕСТВОТО ПРОСТИ БРОЕВИ

Во врска со простите и сложените броеви прво ќе одговориме на следниве две прашања:

- Колку прости и колку сложени броеви има?
- Како да ги определиме простите броеви помали од даден број M ?

Што се однесеува до второто прашање, одговорот е едноставен. Имено, постојат бесконечно многу сложени броеви. Навистина, броевите $4k, k\geq 1$ се деливи со 1, 2 и 4, што значи дека имаат најмалку три делители, па затоа тие се сложени. За да одговориме на второто прашање, прво ќе докажеме едно помошно тврдење.

Теорема 1. Секој природен број n, поголем од 1, е делив барем со еден прост број.

Доказ. Ако природниот број n е прост, тогаш тврдењето е докажано. Имено, тој е делив со самиот себе, што значи барем со еден прост број.

Нека претпоставиме дека n е произволен сложен број. Тогаш, тој мора да има барем еден делител различен од 1 и n, бидејќи во спротивно ќе биде прост број. Нека најмалиот од сите делители на n, различни од 1 и n, го означиме со p. Ќе докажеме дека p е прост број. Навистина, ако p е сложен број, тогаш тој мора да има делител q таков што $1<q<p$. Но, тогаш бројот q е делител на n, помал од p, што му противречи на тоа дека зедовме p да е најмалиот делител на n, различни од 1 и n. Од добиената противречност следува дека p е прост број. Конечно, сложениот број n е делив со простиот број p, што значи барем со еден прост број. ■

Во следната теорема ќе докажеме дека множеството прости броеви е бесконечно.

Теорема 2 (Евклид). Множеството прости броеви е бесконечно.

Доказ. Да претпоставиме дека множеството прости броеви е конечно, т.е. дека постојат конечно многу прости броеви и да ги нумерираме во растечки редослед

$$p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5,\ ...,\ p_n=p\ . \tag{1}$$

Да го разгледаме бројот $N=p_1p_2p_3...p_n+1$. Имаме, $N=p_iN_i+1$, за $i=1,$ $2,...,n$ од што следува дека ниту еден од простите броеви во (1) не е делител на бројот N. Значи, или бројот N е прост број или има прост делител кој не е меѓу броевите во (1). И во двата случаи заклучуваме дека постои прост број $q>p_n$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека постојат бесконечно многу прости броеви. ■

Покрај доказот на Евклид за бесконечноста на множеството прости броеви, постојат и други докази на ова тврдење, за кои исто така може да се каже дека се пример на кратки и елегантни математички докази. Следнава теорема е еден таков пример. Броевите $3=4\cdot1-1$, $7=4\cdot2-1$ и $11=4\cdot3-1$ се од видот $4k-1$, $k\in\mathbb{N}$ и тие се прости. Во врска со оваа класа броеви ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 3. Постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k-1$, $k\in\mathbb{N}$.

Доказ. Нека претпоставиме дека постојат конечно многу прости броеви од видот $4k-1$, $k\in\mathbb{N}$ и нека $p_1, p_2,..., p_n$ се сите такви броеви. Да го разгледаме бројот

$$N=4p_1p_2...p_n-1.$$

Производ на било кои два броја од видот $4k+1$ и број од истиот вид, па затоа бројот N мора да има барем еден прост делител p од видот $4k-1$, $k\in\mathbb{N}$. Но, ниту еден од броевите $p_1, p_2,..., p_n$ не е делител на N, што значи дека постои прост број p од видот $4k-1$, кој е различен од броевите $p_1, p_2,..., p_n$. Последното противречи на претпоставката дека $p_1, p_2,..., p_n$ се сите прости броеви од видот $4k-1$, $k\in\mathbb{N}$. Конечно, од добиената противречност следува дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k-1$, $k\in\mathbb{N}$. ■

Забелешка 1. Од теоремата 3 непосредно следува точноста на теоремата 2. Имено, бидејќи имаме бесконечно многу прости броеви од видот $4k-1$, $k\in\mathbb{N}$ заклучуваме дека множеството прости броеви е бесконечно.

Теорема 4. За секој природен број $n>2$ постои барем еден прост број p таков што $n<p<n!$.

Доказ. За бројот $n!-1$ можни се следниве два случаја:

а) Бројот $n!-1$ е прост и со тоа тврдењето е докажано.

б) Бројот $n!-1$ е сложен. Според теорема 1 тој е делив со барем еден прост број p. Но, бројот $n!-1$ не е делив со ниту еден од броевите 2, 3, ..., n, бидејќи во спротивно бројот 1 би бил делив со тој број, што не е можно. Затоа $n<p<n!$. ■

Забелешка 2. Од теоремата 4 непосрено следува точноста на теоремата 2. Имено, бесконечната низа

$$3, 3!, (3!)!, ((3!)!)!, ...$$

е растечка, а според теоремата 4 меѓу секои два нејзини членови постои барем еден прост број. Од последното следува дека множеството прости броеви е бесконечно.

Претходно видовме дека множеството сложени броеви е бесконечно.

Во следната теорема ќе докажеме едно интересно тврдење во врска со сложените броеви.

Теорема 5. За произволен природен број n постојат n последователни сложени броеви.

Доказ. Да ги разгледаме броевите

$$a_1 = (n+1)n(n-1)\cdot ... \cdot 3\cdot 2+2$$
$$a_2 = (n+1)n(n-1)\cdot ... \cdot 3\cdot 2+3$$
$$a_3 = (n+1)n(n-1)\cdot ... \cdot 3\cdot 2+4$$
$$...$$
$$a_{n-1} = (n+1)n(n-1)\cdot ... \cdot 3\cdot 2+n$$
$$a_n = (n+1)n(n-1)\cdot ... \cdot 3\cdot 2+(n+1)$$

Јасно, ова се n последователни природни броеви поголеми од $n+1$ и сите се сложени, бидејќи

$$2 \mid a_1, 3 \mid a_2, 4 \mid a_3, ..., n \mid a_{n-1}, (n+1) \mid a_n . \blacksquare$$

На крјајот од овој дел ќе докажеме уште едно тврдење кое ни овозможува да ја скратиме постапката при проверката дали еден број е прост или сложен.

Теорема 6. Ако природниот број $p, p>1$ не се дели со простите броеви чии квадрати се помали од p, тогаш p е прост број.

Доказ. Нека p е сложен број. Постои природен број $a \neq p$ и 1 таков што $a \mid p$. Значи, $p = ab$ каде a и b се природни броеви помали од p. Нека $a \leq b$. Тогаш,

$$a^2 \leq ab = p.$$

Можни се два случаи: a е прост број или a не е прост број.

Ако a е прост број, тогаш p се дели со прост број чиј квадрат е помал од p и во овој случај тврдењето е докажано.

Ако a не е прост број, тогаш постои прост број $q < a$ таков што $q \mid a$, па затоа $q \mid p$. Притоа

$$q^2 < a^2 \leq p.$$

Според тоа, p се дели со прост број чиј квадрат е помал од p, па и во овој случај тврдењето е докажано. $\blacksquare$

Во теорема 3 докажавме дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $4k-1, k\in\mathbb{N}$, а може да се докаже дека постојат и бесконечно многу прости броеви од видот $6k-1, k\in\mathbb{N}$. Но, наместо броевите 4 и -1, односно броевите 6 и -1, да земеме произволни броеви a и b, $a,b\in\mathbb{N}$. Тогаш се поставува прашање дали меѓу броевите $an+b$ има бесконечно многу прости броеви. На пример, дали меѓу броевите од видот $4n+1$ има бесконечно многу прости броеви? Одговорот на поставеното прашње понекогаш е едноставен. Така, ако $\mathrm{NZD}(a,b)>1$, тогаш меѓу броевите од видот $an+b$ нема прости броеви. Според тоа, нас не интересира случајот кога $\mathrm{NZD}(a,b)=1$. Во овој случај одговорот на поставеното прашање е потврден, но доказот на овој факт е доста тежок. Тоа прв го докажал германскиот математиар Дирихле, кој ја докажал таканаречената теорема на Дирихле:

Нека се дадени заемно простите броеви a и b. Тогаш меѓу броевите $an+b, n\in\mathbb{N}$ има бесконечно многу прости броеви.

Понатаму, познати се многу обиди да се најде правило според кое само прости броеви се јавуваат во множеството природни броеви, односно да се најде формула со која ќе се добиваат само прости броеви. Така, големиот француски математичар Пјер Ферма (XVII век) напишал дека мисли дека сите броеви од видот $2^{2^n}+1$, $n\in\mathbb{N}$ се прости. Но, се покажало дека ова не е точно, бидејќи за $n=0,1,2,3,4$ се добиваат прости броеви, а за $n=5$ големиот швајцарски математичар Леонард Ојлер во 1732 година докажал дека $2^{2^5}+1=641\cdot 6700417$, а во 1886 година математичарот Зелхоф докажал дека за бројот $2^{2^{25}}+1$ е делив со $5\cdot 2^{39}+1$.

Друг познат случај е с таканаречените Мерсенови броеви. Францускиот математичар Мерсен во XVII век ги набљудувал броевите 2^p-1, каде p е прост број. Тој знаел дека од овој израз се добиваат прости броеви за $p=2,3,5,7,13,17,19$, а сложени броеви за $p=11,23,29$. Покасно се најдени уште прости броеви од овој вид, но како овие броеви за големо p се многу големи, наоѓањето на нови прости броеви од овој вид било можно само со користење на компјутери. До 1965 година најголемиот прост Мерсенов број бил $2^{11213}-1$ и овој број имал 3376 цифри. Веројатно со конструкција на помоќни компјутери ќе може да се проверува дали има поголеми прости Мерсенови броеви, но до денес не е познато дали дали има бесконечно многу прости Мерсенови броеви.

2. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АРИТМЕТИКА

Одделни аритметички задачи можеме едноставно да ги решиме ако даден природен број го разложиме на производ од прости множители. Се поставува прашањето дали секој природен број може да се претстави како производ од прости броеви. Во врска со ова се покажува дека секој сложен број е производ од прости броеви. Пред да го докажеме ова тврдење, кое е познато како *основна теорема на аритметиката,* ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 7. Ако p е прост број и $p|ab$, тогаш $p|a$ или $p|b$.

Доказ. Да претпоставиме дека $p\nmid a$. Тогаш a и p се заемно прости броеви. Но, $p|ab$, па затоа дека $p|b$.

Аналогно се докажува дека ако $p\nmid b$, тогаш $p|a$. ■

Теорема 8 (основна теорема на аритметиката). Секој природен број N на единствен начин може да се запише како производ на прости множители, (редоследот на множителите не е важен).

Доказ. Најпрво ќе докажеме дека природниот број N може да се запише како производ на прости множители.

Ако N е прост број, тогаш $N=p$ и теоремата е докажана.

Да претпоставиме дека N не е прост број. Тогаш $N=n_1n_2$. Ако n_1 и n_2 се прости броеви, тогаш доказот е завршен. Ако n_1 или n_2 не е прост број, тогаш постапката ја повторуваме и по конечен број чекори (според теоремата 6 сложен број е делив само со простите броеви чии квадрати се помали или еднакви на самиот број) го добиваме претставувањето

$$N=p_1p_2...p_n, \tag{1}$$

каде што $p_i, i=1,2,...,n$ се прости броеви.

Да претпоставиме дека постојат две претставувања:

$$N=p_1p_2...p_n=q_1q_2...q_k,\ n\le k.$$

Тогаш $p_1|q_1q_2...q_k$ и бидејќи два прости броеви се или меѓусебно еднакви или се заемно прости, од теоремата 7 следува дека $p_1=q_j$ за некој $j=1, 2,...,k$. Повторувајќи ја постапката за $p_2,...., p_n$ добиваме дека

$$N=p_1p_2...p_n=(p_1p_2...p_n)q_{n+1}...q_k,$$

од што следува

$$q_{n+1} = ... = q_k = 1,$$

па значи $n = k$ и претставувањето е единствено со точност до редоследот на множителите. ■

Ако во разложувањето (1) некои од множителите се еднакви меѓу себе, на пример p_1 се јавува a_1 пати, p_2 се јавува a_2 пати итн., p_k се јавува a_k пати, тогаш за n добиваме

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k} . \qquad (2)$$

Ваквиот запис на бројот n го нарекуваме *каноничен запис*. Да забележиме дека со помош на каноничниот запис можеме да дадеме едноставен критериум кога еден природен број е полн квадрат. Имено, од претходните разгледувања и од својствата на степените, следува дека:

Природниот број n *е полн квадрат ако и само ако степеновите показатели* a_i, $i = 1,2,...,k$ *во каноничниот запис* (2) *се парни броеви.*

Со помош на каноничниот запис на дадени природни броеви n и m лесно се определуваат *најголемиот заеднички делител* и *најмалиот заеднички содржател* на n и m. Имено, ако

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k} \text{ и } m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_k^{b_k}$$

(некои од броевите a_i и b_j можат да бидат еднакви на нула), тогаш

$$\text{NZD}(m,n) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} ... p_k^{c_k}, \text{ каде што } c_i = \min\{a_i, b_i\}, i = 1,2,...,k \text{ и}$$

$$\text{NZS}(m,n) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} ... p_k^{d_k}, \text{ каде што } d_i = \max\{a_i, b_i\}, i = 1,2,...,k .$$

Така на пример, ако се искористат каноничните записи на броевите

Следнава теорема е последица од каноничниот запис и истата често пати се користи при решавање на задачи.

Теорема 9. Ако производот на два заемно прости броеви е полн квадрат, т.е. ако $ac = b^2$, $\text{NZ}D(a,b) = 1$, тогаш a и c се квадрати на природни броеви, т.е. $a = x^2$ и $c = y^2$.

Доказ. За да бројот биде полн квадрат потребно и доволно е сите степенови показатели во каноничниот запис да бидат парни. Бидејќи a и b се заемно прости, секој прост делител на c^2 се јавува или во a или во b, но не и во двата броја. Затоа простите фактори на броевите a и b мораат да имаат парни показатели, па затоа броевите a и b се полни квадрати. ■

3. БРОЈ НА ДЕЛИТЕЛИ НА ПРИРОДЕН БРОЈ

Лесно се добива дека делители на бројот 12 се: 1, 2, 3, 4, 6 и 12, што значи дека тој има 6 делители, а делители на бројот 72 се: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 и 72, т.е. тој има 12 делители. Од друга страна $12=2^2\cdot 3^1$ и $72=2^3\cdot 3^2$, а за бројот на нивните делители имаме $6=3\cdot 2=(2+1)(1+1)$ и $12=4\cdot 3=(3+1)(2+1)$. Ова укажува дека бројот на делителите $\tau(n)$ на природниот број n е непосредно поврзан со степеновите показатели на простите броеви во неговото канонично разложување $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$. Имено, точна е следнва теорема.

Теорема 10. Бројот на делителите на природниот број $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ е еднаков на

$$\tau(n)=(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1).$$

Доказ. Единствени прости делители на бројот n се броевите $p_1,p_2,$ ..., p_k, па затоа секој делител на бројот n е од видот $m=p_1^{b_1}p_2^{b_2}...p_k^{b_k}$, каде $0\le b_i\le a_i$, за $i=1,2,...,k$. Според тоа, за првиот множител имаме a_1+1 можност, за вториот множител имаме a_2+1 можност, ..., за $k-$тиот множител имаме a_k+1 можност. Конечно, од комбинаторниот принцип на прозвод добиваме дека за бројот m имаме

$$\tau(n)=(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1),$$

што и требаше да се докаже. ■

Теорема 11. Природниот број n е точен квадрат ако и само ако има непарен број делители.

Доказ. Природниот број n е полн квадрат ако и само ако степеновите показатели a_i, $i=1,2,...,k$ во каноничниот запис $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ се парни броеви, т.е. ако и само ако $a_i=2b_i$ за $i=1,2,...,k$. Според тоа, природниот број е точен квадрат ако и само ако

$$\tau(n)=(2b_1+1)(2b_2+1)...(2b_k+1),$$

т.е. ако и само ако тој има непарен број делители. ■

4. РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Постојат само два последователни природни броеви кои се прости. Докажи!

Решение. Јасно, броевите 2 и 3 се последователни природни броеви кои се прости. Нека n и $n+1$ се два последователни природни броја такви што $n>2$. Тогаш тоа се два броја кои се поголеми од 2 и еден од нив е парен, а другиот непарен. Сега тврдењето следува од фактот дека парен број поголем од 2 е сложен број. ■

Задача 2. Докажи дека секој прост број поголем од 3 е од видот $6n-1$ или $6n+1, n\in\mathbb{N}$.

Решение. Секој природен број може да се запише во видот $6n+k$, $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Јасно, броевите

$$\begin{aligned}&6n=2\cdot 3n,\\&6n+2=2(3n+1),\\&6n+3=3(2n+1),\\&6n+4=2(3n+2),\end{aligned}$$

се сложени. Според тоа, секој прост број поголем од 3 е од видот $6n+1$ или $6n+5=6(n+1)-1,\ n\in\mathbb{N}$.

Овде ќе забележиме дека сите природни броеви од видот $6n-1$ или $6n+1, n\in\mathbb{N}$ не се прости. Навистина, за $n=4$ имаме $6n+1=25$ и тоа е сложен број, а за $n=6$ имаме $6n-1=35$ и тоа е сложен број. ■

Задача 3. Квадратот на секој прост број $p>3$ е број од видот $12k+1$. Докажи!

Решение. Според претходната задача секој прост број p поголем од 3 е од видот $p=6n-1$ или $p=6n+1, n\in\mathbb{N}$. Според тоа, квадратот на секој прост број поголем од 3 е од видот

$$(6n-1)^2=36n^2-12n+1=12(3n^2-n)+1=12k+1 \text{ или}$$

$$(6n+1)^2=36n^2+12n+1=12(3n^2+n)+1=12k'+1,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 4. Тројката $(3,5,7)$ е единствена тројка последователни непарни броеви. Докажи!

Решение. Нека најмалиот од три последователни непарни прости броеви е бројот p. Тогаш $p+2$ и $p+4$ се последователни непарни броеви. Ако $p=3$, тогаш $p+2=5$ и $p+4=7$, па затоа тројката $(3,5,7)$ е една таква тројка.

Нека $p>3$. Тогаш $p=6k-1$ или $p=6k+1, k\in\mathbb{N}$.

Ако $p=6k-1$, тогаш $p+2=6k+1$ и $p+4=6k+3=3(2k+1)$ е сложен број. Ако $p=6k+1$, тогаш $p+2=6k+3=3(2k+1)$ е сложен број. Значи, тројката $(3,5,7)$ е единствена тројка последователни непарни прости броеви. ■

Задача 5. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш $24|p^2-1$. Докажи!

Решение. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш $p=6k\pm1$. Според тоа, $p^2-1=12k(3k\pm1)$. Можни се два случаја:

1) ако $k=2m$, тогаш $p^2-1=24m(6m\pm1)$, па затоа $24|p^2-1$, и
2) ако $k=2m+1$, тогаш

$$p^2-1=24(2m+1)(3m+2) \text{ или } p^2-1=24(2m+1)(3m+1),$$

па затоа $24|p^2-1$. ■

Задача 6. Ако p и q се прости броеви поголеми од 3, тогаш $24|p^2-q^2$.

Решение. Според претходната задача $24|p^2-1$ и $24|q^2-1$, па затоа $24|(p^2-1-(q^2-1))=p^2-q^2$. ■

Задача 7. Секој прост број $p>2$ може на единствен начин да се претстави како разлика на квадрати на два природни броја. Докажи!

Решение. Нека $p=m^2-n^2=(m+n)(m-n), m,n\in\mathbb{N}$. Бидејќи p е прост број, единствени негови делители се 1 и p. Но, $m+n>m-n$, па затоа $m+n=p, m-n=1$, од каде добиваме $m=\frac{p+1}{2}, n=\frac{p-1}{2}$. Бидејќи p е непарен број, заклучуваме дека $m,n\in\mathbb{N}$ и притоа важи

$$p=(\tfrac{p+1}{2})^2-(\tfrac{p-1}{2})^2. \blacksquare$$

Задача 8. Определи го можниот остатокот при делењето на простиот број p со бројот 30.

Решение. Јасно, ако $p \in \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$, тогаш остатокот при делење на бројот p со 30 е самиот број p. Нека $p > 30$ е прост број. Тогаш $p = 30m + n$, каде $1 \le n < 30$. Јасно,

$$n \notin \{2,3,4,5,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,24,25,26,27,28\},$$

бидејќи во спротивно p не е прост број. Според тоа, за $p > 30$ одстатокот при делењето на p со бројот 30 може да биде еден од броевите 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 или 29.

Забелешка. Во решението на оваа задача всушност докажавме дека остатокот при делењето на простиот број p со 30 не може да биде сложен број. ■

Задача 9. Горјан поделил некој прост број p со бројот 60 и како остаток добил сложен број. Определи го остатокот кој го добил Горјан.

Решение. Имаме $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, па затоа ако остатокот кој го добил Горјан е делив со некој од броевите 2, 3 или 5, тогаш бројот p ќе биде сложен, што е противречност. Од друга страна, добиениот остаток е сложен број помал од 60, па тој мора да е помал од 60 и да е производ на два прости броја различни од 2, 3 и 5. Единствен таков број е бројот $49 = 7 \cdot 7$.

Забелешка. Прост број кој при делење со 60 дава остаток 49 е бројот 229. Навистина, $229 = 60 \cdot 3 + 49$. ■

Задача 10. Ако остатокот при делењето на некој прост број p со бројот 210 е сложен број, докажи дека тој остаток е поголем од 120.

Решение. Имаме $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, па затоа ако добиениот остаток е делив со некој од броевите 2, 3, 5 или 7, тогаш бројот p ќе биде сложен, што е противречност. Од друга страна, добиениот остаток е сложен број помал од 120, па тој мора да е производ на два прости броја поголеми од 7. Најмалиот таков број е $121 = 11 \cdot 11 > 120$.

Забелешка. Навистина, на пример, прости броеви кои при делење со бројот 210 даваат остатоци сложени броеви се броевите 331 и 839. Имено, важи $331 = 210 \cdot 1 + 121$ и $839 = 210 \cdot 3 + 209$. ■

Задача 11. Определи ги сите прости броеви p такви што $p+1$ е:

а) точен квадрат,

б) точен куб.

Решение. а) Нека p е прост број таков што $p+1=x^2$, за некој природен број x. Тогаш

$$p=x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Но, бројот p е прост, па од последното равенство следува $x-1=1$, т.е. $x=2$. Според тоа, $p=2^2-1=3$.

б) Нека p е прост број таков што $p+1=x^3$, за некој природен број x. Тогаш

$$p=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Но, бројот p е прост, па од последното равенство следува $x-1=1$, т.е. $x=2$. Според тоа, $p=2^3-1=7$. ■

Задача 12. Запиши три прости броја користејќи ги сите девет ненулти цифри само по еднаш така што збирот на тие три броја биде најмалиот можен број. На пример, броевите 941, 827 и 653 ги задоволуваат сите услови освен последниот, т.е. нивниот збир не е минимален.

Решение. Треба да се обидеме меѓу трицифрените броеви да најдеме такви три броја чиј збир е трицифрен број. Цифрите на единиците на овие броеви може да бидат 1, 3, 7 или 9. Ќе ги земеме цифрите 3, 7 и 9, за да се обидеме 1 да е цифра на стотките на некој од овие броеви. За да цифрите на стотките бидат најмали, а со тоа и збирот на броевите биде најмал можен ќе провериме дали тоа може да се цифрите 1, 2 и 4. Во тој случај цифрите на стотките мора да се 5, 6 и 8. Со непосредна проверка се добива дека во овој случај немаме решение на задачата. Потоа за цифрите на стотките земаме 1, 2 и 5, при што цифрите на десетките ќе бидат 4, 6 и 8. Во овој случај го добиваме решението 149, 263 и 587. Притоа важи $149+263+587=999$. ■

Задача 13. Горјан го помножил бројот a со 10, а Андреј го помножил бројот a со 15, при што и двајцата добиле прости броеви. Определи го бројот a.

Решение. Нека Горјан го добил простиот број p, а Андреј го добил простиот број q. Тогаш $p=10a$ и $q=15a$, од каде следува $\frac{p}{10}=\frac{q}{15}$, односно $3p=2q$. Тоа значи дека $2|p$ и $3|q$, т.е. $p=2$ и $q=3$. Конечно, $a=\frac{2}{10}=\frac{3}{15}=0,2$. ■

Задача 14. Должините на рабовите на еден квадар, изразени во сантиметри, се три различни прости броја. Волумнот на квадарот е двоцифрен број, а неговата плоштина е трицифрен број. Определи ги должините на рабовите на овој квадар.

Решение. Нека бараните броеви се p,q,r. Без ограничување на општоста може да претпоставиме дека $p<q<r$. Од условот на задачата следува

$$10\leq pqr<100 \text{ и } 100\leq 2(pq+qr+rp)<1000,$$

односно

$$10\leq pqr<100 \text{ и } 50\leq pq+qr+rp<500.$$

Првиот услов го задоволуваат тројките прости броеви (2,3,5), (2,3,7), (2,3,11), (2,3,13) и (2,5,7). Од овие пет тројки вториот услов го задоволуваат тројките (2,3,11), (2,3,13) и (2,5,7) и тоа се бараните решенија. ■

Задача 15. Дали постои четирицифрен број a таков што секој едноцифрен, двоцифрен и трицифрен број формиран од некои последователни цифри на бројот a е прост.

Решение. Не. Во таков број може да се појават само цифрите 2, 3, 5 и 7. Бидејќи цифрите 2 и 5 може да бидат само на прво место, во записот на бараниот број може да се појави само една од нив и тоа на прво место. Ниту една цифра не може да се појави три пати, бидејќи тогаш би имале две еднакви соседни цифри кои ќе определат двоцифрен сложен број. Наведените услови ги задоволуваат само броевите 2373, 2737, 5373 и 5737. Во записот на првиот број се појавува сложениот број 237, во записот на вториот број сложениот број 273, во записот на третиот број сложениот број 537 и во записот на четвртиот број сложениот број 573 (сите овие броеви се деливи со 3). ■

Задача 16. Нека $p_1,p_2,...,p_n,...$ е низата прости броеви. Дали сите броеви од видот $N_n=p_1p_2p_3...p_n+1$ се прости?

Решение. Не. Непосредно се докажува дека за $n=1,2,3,4,5$ броевите N_n се прости (провери). Меѓутоа,

$$N_6=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1=30031=59\cdot 509$$

е сложен број. ■

Задача 17. Нека $p_1, p_2, ..., p_k, ...$ е низтаа прости броеви. Докажи дека за $k > 1$ бројот $M_k = p_1 p_2 p_3 ... p_k - 1$ не е квадрат на природен број.

Решение. Секој природен број може да се запише во видот $6n + k$, $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Имаме:

$$(6n)^2 = 6 \cdot 6n^2,$$
$$(6n+1)^2 = 6 \cdot (6n^2 + 2n) + 1,$$
$$(6n+2)^2 = 6 \cdot (6n^2 + 4n) + 4,$$
$$(6n+3)^2 = 6 \cdot (6n^2 + 6n + 1) + 3,$$
$$(6n+4)^2 = 6 \cdot (6n^2 + 8n + 2) + 4,$$
$$(6n+5)^2 = 6 \cdot (6n^2 + 10n + 4) + 1,$$

што значи дека квадрат на природен број при делење со 6 не можед а даде остаток 5. Од друга страна за секој $k > 1$ важи

$$M_k = p_1 p_2 p_3 ... p_k - 1 = 6(p_3 ... p_k - 1) + 5,$$

па затоа за секој $k > 1$ бројот $M_k = p_1 p_2 p_3 ... p_k - 1$ не е квадрат на природен број. ■

Задача 18. Докажи дека бројот $10^{2019} + 1$ е сложен.

Решение. Ако го искористиме идентитетот $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$, добиваме

$$10^{2019} + 1 = 10^{3 \cdot 673} + 1 = (10^{673})^3 + 1 = (10^{673} + 1)((10^{673})^2 - 10^{673} + 1),$$

па како $10^{673} + 1 > 1$ и $(10^{673})^2 - 10^{673} + 1 > 1$, заклучуваме дека бројот $10^{2019} + 1$ е сложен. ■

Задача 19. Докажи дека во 100 последователни природни броеви не може да има повеќе од 26 прости броеви.

Решение. Нека најмалиот во множеството од 100 последователни природни броеви е поголем од 7. Да земеме 30 последователни броеви на ова множество. Меѓу нив прости броеви може да бидат само броевите кои при делење со 30 даваат остатоци 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29, бидејќи сите други броеви се деливи со 2, 3 или 5. Бидејќи овие броеви при делење со 7 даваат 7 различни остатоци, барем еден од нив мора да е делив со 7, па затоа меѓу нив има најмногу 7 прости броеви. Според тоа, меѓу првите 90 броеви на разгледуваното множество, бројот на простите броеви не е поголем од 21. Останувaат уште 10 броеви, од кои пет се парни, еден е непарен број делив со 5, па затоа меѓу нив може да има најмногу 4 прости броја. Затоа во разгледуваното множество има најмногу 25 прости броеви.

Од друга страна, непосредно се проверува дека меѓу стоте броеви од 2 до 101 има 26 прости броеви. Ова е единственото такво множество, бидејќи за множествата со 100 последователни прости броеви кои почнуваат со 1, 3, 4, 5, 6 и 7 непосредно се проверува дека содржат најмногу 25 прости броеви. ■

Задача 20. Докажи дека постои низа од 100 последователни природни броеви меѓу кои има точно 5 прости броја.

Решение. Со S_n да го означиме множеството кое содржи 100 последователни природни броеви такви што најмалиот од нив е n. Имаме

$$S_1=\{1,2,3,...,100\},\ S_2=\{2,3,4,...,101\},\ ...$$

Да ја разгледаме низата ненегативни цели броеви

$$b_1,b_2,b_3,... \qquad (1)$$

каде b_n е бројот на простите броеви во множеството S_n. Доволно е да докажеме дека во ова множество се појавува бројот 5.

Според претходната заадача $b_1=25, b_2=26$, а според теорема 5 за некој природен број k важи $b_k=0$. Од друга страна, секој член на низата (1), почнувајќи од вториот се разликува најмногу за 1 од претходниот. Имено, S_{n+1} се добива од S_n така што се испушта бројот n и се додава бројот $n+100$. Оттука следува дека $b_{n+1}=b_n-1$, ако n е прост број и $n+100$ е сложен број, или $b_{n+1}=b_n$, ако двата броја n и $n+100$ се или прости или сложени, или $b_{n+1}=b_n+1$, ако n е сложен број и $n+100$ е прост број.

Бидејќи секои два последователни члена на низата се разликуваат најмногу за 1, следува дека во таа низа меѓу $b_1=25$ и $b_k=0$ мора да се појави секој број од 0 до 25, што значи и бројот 5. ■

Задача 21. Определи го најмалиот природен број кој има точно 4 делители.

Решение. Во каноничното разложување на најмалиот природен број кој има точно 4 делители може да учествуваат само првите два прости броја 2 и 3. Нека $n=2^a\cdot 3^b$. Тогаш од условот на здачата следува $(a+1)(b+1)=4$, од каде добиваме $a+1=1,\ b+1=4;\ a+1=2, b+1=2$ или $a+1=4, b+1=1$, па затоа $a=0, b=3$; $a=b=1$ или $a=3, b=0$. Според тоа, $n=2^0\cdot 3^3=27$, $n=2^1\cdot 3^1=6$ или $n=2^3\cdot 3^0=8$, и според тоа, бараниот број е $n=6$. ■

Задача 22. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 30 и кој има точно 12 делители.

Решение. Од $30=2\cdot 3\cdot 5$ следува дека бараниот број n има најмалку три прости делители, и тоа 2, 3 и 5. Но, $12=2\cdot 2\cdot 3$, па од теоремата 10 следува дека тој има точно три прости делители. Затоа $n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$, па од теоремата 10 добиваме $(a+1)(b+1)(c+1)=12=2\cdot 2\cdot 3$. Можни се следниве три случаи:

1) $a+1=2, b+1=2, c+1=3$, т.е. $a=b=1, c=2$, а $n=2^1\cdot 3^1\cdot 5^2=150$,

2) $a+1=2, b+1=3, c+1=2$, т.е. $a=c=1, b=2$, а $n=2^1\cdot 3^2\cdot 5^1=90$, и

3) $a+1=3, b+1=2, c+1=2$, т.е. $b=c=1, a=2$, а $n=2^2\cdot 3^1\cdot 5^1=60$.

Според тоа, бараниот број е $n=60$. ■

Задача 23. Ако природниот број n има 6 делители, а бројот n^2 има 15 делители, колку делители има бројот n^4.

Решение. Нека $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$. Тогаш $n^2=p_1^{2a_1}p_2^{2a_2}...p_k^{2a_k}$ и затоа

$$(a_1+1)(a_2+1)...(a_k+1)=6=3\cdot 2=6\cdot 1$$
$$(2a_1+1)(2a_2+1)...(2a_k+1)=15.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$a_1\ge a_2\ge ...\ge a_k.$$

Тогаш од првото равенство следува дека имаме две можности и тоа:

1) $a_1+1=3, a_2+1=2, a_3+1=...=a_k+1=1$, па затоа $a_1=2, a_2=1, a_3=...=a_k=0$ и во овој случај имаме $(2\cdot 2+1)(2\cdot 1+1)=15$, што значи дека е исполнето второто равенство,

2) $a_1+1=6, a_2+1=a_3+1=...=a_k+1=1$, па затоа $a_1=5, a_2=a_3=...=a_k=0$ и во овој случај имаме $2\cdot 5+1=11\neq 15$, што значи дека не е исполнето второто равенство.

Конечно, $n^4=p_1^{4a_1}p_2^{4a_2}$ и затоа

$$\tau(n^4)=(4a_1+1)(4a_2+1)=(4\cdot 2+1)(4\cdot 1+1)=9\cdot 5=45. \blacksquare$$

Задача 24. Докажи дека бројот $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ е сложен за секој природен број n.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n)((n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

Според тоа, $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ е квадрат на природен број поголем од 1, па затоа е сложен број. ■

Задача 25. Докажи дека бројот n^4+4 е сложен за секој природен број $n \geq 2$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} n^4+4 &= (n^2+2)^2-4n^2 \\ &= (n^2+2)^2-(2n)^2 \\ &= (n^2+2-2n)(n^2+2+2n). \end{aligned}$$

Бидејќи $n \geq 2$, двата множители n^2+2-2n и n^2+2+2n се поголеми од 1, што значи дека бројот n^4+4 е сложен за $n \geq 2$. ■

Задача 26. Дали 629 е прост или сложен број?

Решение. Имаме $629 = 625+4 = 5^4+4$. Сега, од задача 25, за $n=5$ следува дека бројот 629 е сложен. Имаме,

$$629 = (5^2+2-2\cdot 10)(5^2+2+2\cdot 10) = 7\cdot 37\,. \text{ ■}$$

Задача 27. Докажи дека бројот $3^{2n}-1$ е сложен за секој природен број n.

Решение. Имаме:

$$3^{2n}-1 = (3^n)\;\;-1 = (3^n-1)(3^n+1)\,.$$

Сегта тврдењето следува од фактот дека за секој природен број n важи $3^n-1>1$ и $3^n+1>1$. ■

Задача 28. Докажи дека бројот 8^n+1 е сложен за секој природен број n.

Решение. Ако го искористиме идентитетот:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

добиваме

$$\begin{aligned}8^n+1&=(2^3)^n+1=(2^n)^3+1^3=(2^n+1)((2^n)^2-2^n+1)\\&=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1).\end{aligned}$$

Сега тврдењето следува од фактот дека $2^n+1>1$ и $2^{2n}-2^n+1>1$ за секој природен број n. ■

Задача 29. Определи ги сите прости броеви од видот $\frac{n(n+1)}{2}-1$, каде n е природен број.

Решение. Имаме

$$\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n(n+1)-2}{2}=\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Бидејќи броевите $n-1$ и $n+2$ се со различна парност, едниот од нив е парен, а другиот е непарен. Ако $n-1$ е непарен. Тогаш n е парен. За $n=2$ бројот $\frac{n(n+1)}{2}-1=2$ е прост. Ако $n>2$, тогаш $n=2k, k\geq 2$, па затоа $\frac{n(n+1)}{2}-1=(k+1)(2k-1)$ е сложен број.

Ако $n-1$ е парен, тогаш $n-1=2k, k\geq 1$, па затоа $\frac{n(n+1)}{2}-1=k(2k+3)$. Броојот $k(2k+3)$ е прост само за $k=1$, односно $n=3$.

Конечно, бројот $\frac{n(n+1)}{2}-1$ е прост само за $n=2$ и $n=3$. ■

Задача 30. Дали 247 е прост број?

Решение. Даго разгледаме полиномот $P(a)=a^5+a+1$. Имаме

$$\begin{aligned}P(a)&=a^5+a+1=a^5-a^2+a^2+a+1\\&=a^2(a^3-1)+a^2+a+1\\&=a^2(a-1)(a^2+a+1)+(a^2+a+1)\\&=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1).\end{aligned}$$

Понатаму, $P(3)=3^5+3+1=243+3+1=247$, па затоа

$$247=(3^2+3+1)(3^3-3^2+1)=13\cdot 19,$$

што значи дека 247 е сложен број. ■

Задача 31. Дали 1280000401 е прост или сложен број?

Решение. Да го разгледаме полиномот $P(x)=x^7+x^2+1$. Имаме:

$$\begin{aligned}P(x)&=x^7+x^2+1=x^7-x+x^2+x+1\\&=x(x^6-1)+x^2+x+1\\&=x(x^3-1)(x^3+1)+x^2+x+1\\&=(x^2+x+1)(x(x-1)(x^3+1)+1)\\&=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1).\end{aligned}$$

Понатаму, $P(20)=20^7+20^2+1=1280000000+400+1=1280000401$, па затоа

$$1280000401=(20^2+20+1)(20^5-20^4+20^2-20+1)=421\cdot 3020381,$$

што значи дека 1280000401 е сложен број. ■

Задача 32. Дали 1057 е прост или сложен број?

Решение. Да го разгледаме полиномот $P(x)=x^{10}+x^5+1$. Според задача 30 имаме:

$$\begin{aligned}P(x)&=x^{10}+x^5+1=x^{10}-x+x^5+x+1=x(x^9-1)+x^5+x+1\\&=x(x^3-1)(x^6+x^3+1)+x^5+x+1\\&=x(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)+(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)\\&=(x^2+x+1)(x(x-1)(x^6+x^3+1)+x^3-x^2+1)\\&=(x^2+x+1)(x^8-x^7-x^5+x^4+x^3-x+1).\end{aligned}$$

Според тоа, за $x>1$ бројот $x^{10}+x^5+1$ е сложен. За $x=2$ имаме

$$2^{10}+2^5+1=1024+32+1=1057,$$

па затоа 1057 е сложен број. Уште повеќе

$$1057=(2^2+2+1)(2^8-2^7-2^5+2^4+2^3-2+1)=7\cdot 151.\ ■$$

Задача 33. Докажи дека бројот 160401 е сложен.

Решение. Имаме $160401=160000+400+1=20^4+20^2+1$. Понатаму,

$$\begin{aligned}x^4+x^2+1&=x^4+2x^2+1-x^2\\&=(x^2+1)^2-x^2\\&=(x^2+1-x)(x^2+1+x),\end{aligned}$$

што значи дека за секој $x>1$ бројот x^4+x^2+1 е сложен. Специјално, за $x=20$ бројот 160401 е сложен и притоа важи

$$160401=(20^2+1-20)(20^2+1+20)=381\cdot 421. \blacksquare$$

Задача 34. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот n^8+n+1 е прост број.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} n^8+n+1 &= n^8-n^5+n^5+n+1 \\ &= n^5(n^3-1)+n^5+n+1 \\ &= n^5(n-1)(n^2+n+1)+(n^2+n+1)(n^3-n^2+1) \\ &= (n^2+n+1)(n^6-n^5+n^3-n^2+1). \end{aligned}$$

Бидејќи за $n>1$ важи $n^2+n+1>1$ и $n^6-n^5+n^3-n^2+1>1$, заклучуваме дека за $n>1$ бројот n^8+n+1 е сложен. Конечно само за $n=1$ бројот $n^8+n+1=3$ е прост. $\blacksquare$

Задача 35. Определи за кои природни броеви n бројот од видот $n^4+2n^3+2n^2+n-2$ е сложен.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} n^4+2n^3+2n^2+n-2 &= n^4+n^3-n^2+n^3+n^2-n+2n^2+2n-2 \\ &= n^2(n^2+n-1)+n(n^2+n-1)+2(n^2+n-1) \\ &= (n^2+n-1)(n^2+n+2). \end{aligned}$$

Бидејќи за $n>1$ важи $n^2+n-1>1$ и $n^2+n+2>1$, а за $n=1$ добиваме $n^2+n-1=1$ и $n^2+n+2=4$, заклучуваме дека за секој природен број n бројот $n^4+2n^3+2n^2+n-2$ е сложен. $\blacksquare$

5. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Докажи дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $6k-1, k\in\mathbb{N}$.

   Упатство. Постапи како во доказот на теорема 3.

2. Ако меѓу пет последователни непарни броеви има четири прости броеви, тогаш најмалиот од овие прости броеви има цифра на единиците 1. Докажи!

3. Определи го простиот број p за кој и бројот p^2+7 е прост.

4. Ако p е прост број, тогаш p^3+7 е сложен број. Докажи!

5. Определи ги сите прости броеви p за кои и броевите $3p+1$ и $5p+1$ се прости.

6. Ако p $7p-1$ се прости броеви, тогаш $7p+1$ е сложен број. Докажи!

7. Определи го простиот број p за кој и броевите $p+5$ и $p+9$ се прости.

8. Определи го простиот број p за кој и броевите $p+10$ и $p+14$ се прости.

9. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $5p+1$ е точен квадрат на природен број.

10. Дали бројот $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16$ е прост или е сложен.

11. Докажи дека бројот $2^{10}+5^{21}$ е сложен.

12. Докажи дека бројот $2^{2002}+5^{100}$ е сложен.

13. Докажи дека бројот $2^{2002}+1$ е сложен.

14. Докажи дека за секој природен број n збирот на првите $n, n\geq 2$ природни броеви од видот $4k-3$ е сложќен број.

15. Докажи дека бројот $4n^4+1$ е прост само за $n=1$.

16. Дали бројот $2^{2003}+1$ е прост или е сложен?

17. Определи ги сите poриродни броеви n за кои бројот

$$n^4+2n^3-3n^2-4n-1$$

е сложен. Врз основа тоа провери дали бројот 11659 е прост или сложен.

18. Докажи дека бројот 390629 е сложен. Разложи го овој број на множители.

19. Провери дали бројот 810901 е прост или сложен. Ако е сложен разложи го на множители.

20. Докажи дека бројот 39135427 е сложен и разложи го на множители.

21. Дали 32777 е прост број?

22. Бројот 59293 разложи го на множители.

23. Докажи дека бројот $40...09$ (произволно многу нули; барем една) не е квадрат на природен број.

24. Определи го најмалиот природен број кој има точно 1998 делители.

25. Ако $S=1+2+2^2+...+2^{n-1}$, определи го бројот на делителите на бројот $S+1$.

26. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 10^{500} и кои имаат точно 1997 делители.

27. Тројца ученици Зоран, Живко Томе за даден природен број n ги дале следниве искази:
Зоран: Бројот n има 14 делители.
Томе: Бројот n^2 има 28 делители.
Живко: Бројот n е делив со 12.
Се покажало дека еден од исказите не е точен, а другите два искази се точни. Определи го бројот n.