Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска во 1960

Analitičko i geometrisko rešavanje nekih iracionalnih jednačina

DRAGIŠA STEVANOVIĆ, Zrenjanin

Jednačine koje sadrže nepoznatu pod ma kakvim korenom nazivaju se *iracionalnim jednačinama.*

Izložioci tih korena mogu biti ma kakvi brojevi, ali mi ćemo rešavati samo iracionalne jednačine u kojima se javljaju isključivo kvadratni koreni. Takve jednačine mogu da sadrže samo jedan, dva, pa i više kvadratnih korena, kao naprimer ove:

$$\sqrt{x-5}-2=0,\quad \sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}=1 \quad \text{i} \quad \sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+3}\,.$$

Rešavanje takve jedne jednačine, svodi se, kvadriranjem obeju strana, na jednu *racionalnu jednačinu*, koja se naziva *rezolventnom jednačinom* date iracionalne jednačine.

Pitanje je sad da li se kvadriranjem obeju strana neke jednačine dobija ekvivalentna jednačina datoj jednačini.

Da bismo na ovo pitanje odgovorili, poći, ćemo, naprimer, od ove jednačine

(1) $A = B$,

gde su A i B izrazi koji sadrže nepoznate. Ako obe strane ove jednačine kvadriramo imaćemo

(2) $A^2 = B^2$.

Za svako rešenje jednačine (1) A i B imaju jednake numeričke vrednosti; isto tako njihovi kvadrati, što znači da je i jednačina (2) zadovoljena. Obratno, za svako rešenje jednačine (2) A^2 i B^2 imaju jednake numeričke vrednosti, tj. $A^2 - B^2 = 0$ ili $(A + B)(A - B) = 0$.

Kako je proizvod jednak nuli ako je bilo koji činilac nula, poslednja jednačina se svodi na jednačine

(3) $A - B = 0$ i (4) $A + B = 0$.

Iz (3) imamo $A = B$, znači jednačina (1) je zadovoljena. Ali, iz (4) imamo $A = -B$, te jednačina (1) nije zadovoljena. Jednačina (4) se dobija (1) promenom znaka na desnoj strani. Dakle, jednačina (2) nije ekvivalentna jednačini (1). Jednačina (2) sadrži sva rešenja jednačine (1), ali ona može sadržati i druga, a to su rešenja jednačine $A = -B$, ako ih ima.

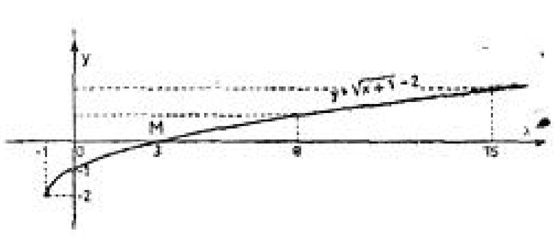
Prema tome, *dizanjem na kvadrat obeju strana date jednačine ne dobija se ekvivalentna jednačina, nego se tom operacijom uvode još neki koreni, koji se nazivaju stranim korenima date iracionalne jednačine.*

Zbog toga, pri rešavanju iracionalne jednačine moramo uvek proveriti da li rešenja odgovarajuće racionalne jednačine zadovoljavaju i datu iracionalnu jednačinu. Na primerima ćemo pokazati o čemu treba voditi računa pri rešavanju iracionalnih jednačina. Istovremeno ćemo rešavati iracionalne jednačine analitički i geometriski. Uzećemo u obzir najjednostavnije slučajeve, naime ove:

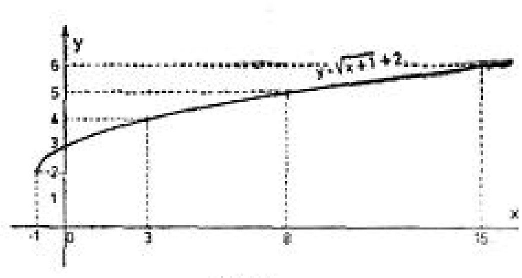
1. Jednačine oblika $\sqrt{A} + B = 0$, gde je A linearna funkcija, a B broj, ili A linearna funkcija i B linearna funkcija.

Primeri. 1. Rešiti jednačinu $\sqrt{x+1} - 2 = 0$.

Uzmimo u obzir samo aritmetičku vrednost kvadratnog korena. Rešimo datu jednačinu prvo analitički. Imamo $\sqrt{x+1} = 2$. Ako obe strane ove jednačine dignemo na kvadrat, dobićemo racionalnu jednačinu $x + 1 = 4$, odakle je $x = 3$. Proverimo tačnost dobijenog rešenja. Pošto smo uzeli u obzir samo aritmetičku vrednost korena mora biti $x + 1 \geqslant 0$, tj. $x \geqslant -1$. Broj 3 zadovoljava ovaj uslov, prema tome on je koren date jednačine.



Sl. 1

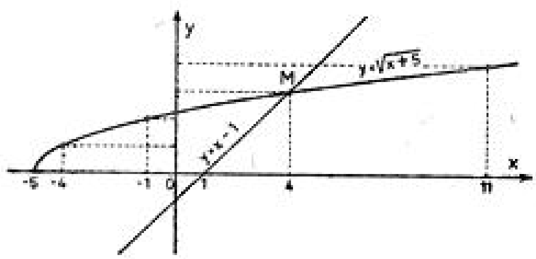


Sl. 2

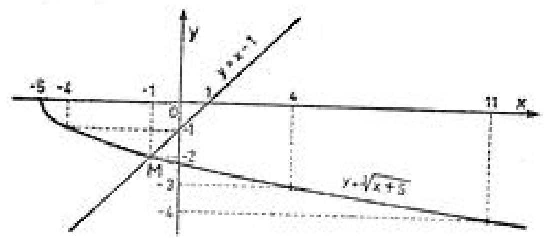
Rešimo sad geometriski datu jednačinu. Stavimo $y = \sqrt{x+1} - 2$ i konstruišimo grafik ove funkcije. Mora biti $x + 1 \geqslant 0$, tj. $x \geqslant -1$. Iz sl. 1 vidimo da grafik funkcije $y = \sqrt{x+1} - 2$ seče osu x u tački M čija je apscisa 3. Dakle, funkcija

$y = \sqrt{x+1} - 2$ ima nulu za $x = 3$, prema tome jednačina $\sqrt{x+1} - 2 = 0$ ima jedan koren $x = 3$.

2. Rešiti jednačinu $\sqrt{x+1} + 2 = 0$. Iz same strukture jednačine možemo zaključiti da je ova jednačina nemoguća, tj. ona nema rešenja, jer zbir dva pozitivna broja ne može biti jednak nuli. Do istog zaključka možemo doći ako je rešimo i analitički i geometriski. Imamo $\sqrt{x+1} = -2$. Ako obe strane ove jednačine kvadriramo, dobićemo racionalnu jednačinu $x + 1 = 4$, odakle je $x = 3$. Međutim, broj 3 nezadovoljava datu jednačinu. Ako konstruišemo grafik funkcije $y = \sqrt{x+1} + 2$ (sl. 2), vidimo da njen grafik ne seče osu x. Dakle, funkcija $y = \sqrt{x+1} + 2$ nema nula, a jednačina $\sqrt{x+1} + 2 = 0$ nema rešenja.



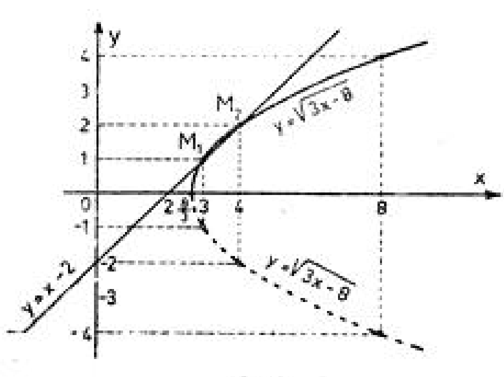
Sl. 3



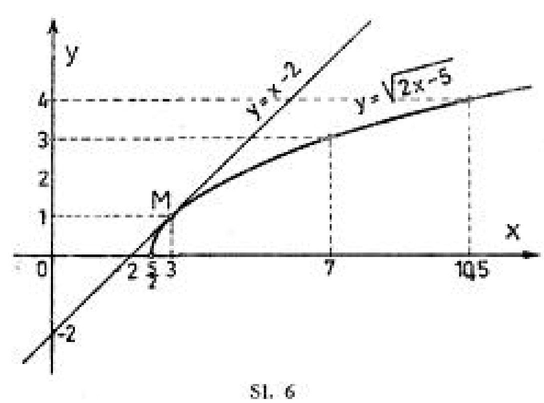
Sl. 4

Napomena. Jednačina $\sqrt{x+1} + 2 = 0$ se zove »konjugovana jednačina« jednačine $\sqrt{x+1} - 2 = 0$.

3. Rešiti jednačinu $x - 1 = \sqrt{x+5}$. Ako obe strane ove jednačine kvadriramo dobićemo jednačinu $x^2 - 3x - 4 = 0$, čija su rešenja $x_1 = 4, x_2 = -1$. Samo prvo rešenje zadovoljava datu jednačinu. Drugo rešenje zadovoljava njoj konjugovanu jednačinu $x - 1 = -\sqrt{x+5}$. Da bismo datu jednačinu $x - 1 = \sqrt{x+5}$ rešili **geometriski,** stavimo $y = x - 1$ i $y = \sqrt{x+5}$. Grafik funkcije $y = x - 1$ je prava, a grafik funkcije $y = \sqrt{x+5}$ je kvadratna poluparabola (sl. 3). Mora biti $x + 5 \geq 0$, tj. $x \geq -5$. Iz slike 3 vidimo da prava seče krivu u tački M čija je apscisa $x = 4$. Prema tome jednačina $x - 1 = \sqrt{x+5}$ ima koren.



Sl. 5



Sl. 6

Da bismo rešili drugu jednačinu konstruišimo grafike funkcija $y = x - 1$ i $y = -\sqrt{x+5}$ (sl. 4). Iz slike 4 vidimo da se ova dva grafika seku u tački M čija je apscisa $x = -1$. Prema tome, jednačina $x - 1 = -\sqrt{x+5}$ ima koren.

4. Rešiti jednačinu $x - 2 = \sqrt{3x - 8}$. Analitičko rešavanje daje dva korena $x_1 = 3$ i $x_2 = 4$. Oba korena zadovoljavaju datu jednačinu. Konstruisani grafici funkcija $y = x - 2$ i $y = \sqrt{3x - 8}$ (sl. 5) seku se u dvema tačkama M_1 i M_2 čije su apscise $x_1 = 3$ i $x_2 = 4$.

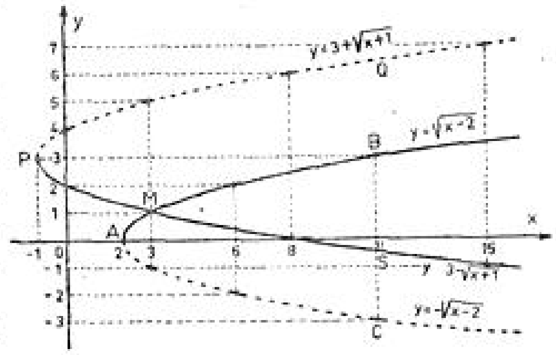
Konjugovana jednačina $x - 2 = -\sqrt{3x - 8}$ nema korena. Na slici 5 tačkasta kriva $y = -\sqrt{3x - 8}$ ne seče se sa pravom $y = x - 2$.

5. Rešiti još jednačinu $x - 2 = \sqrt{2x - 5}$. Analitičko rešavanje daje dvostruki koren $x = 3$. Iz slike 6 vidimo da se grafici funkcija $y = x - 2$ i $y = \sqrt{2x - 5}$ diraju u tački M, čija je apscisa $x = 3$.

Konjugovana jednačina $x - 2 = -\sqrt{2x - 5}$ nema rešenja.

Na osnovu rešenih primera iracionalnih jednačina oblika $\sqrt{A} + B = 0$, gde su A i B linearne funkcije, možemo dati sledeći zaključak o broju korena, tj. mogu biti tri slučaja: 1. jednačina ima dva realna korena, 2. jedan realan koren i 3. nema koren.

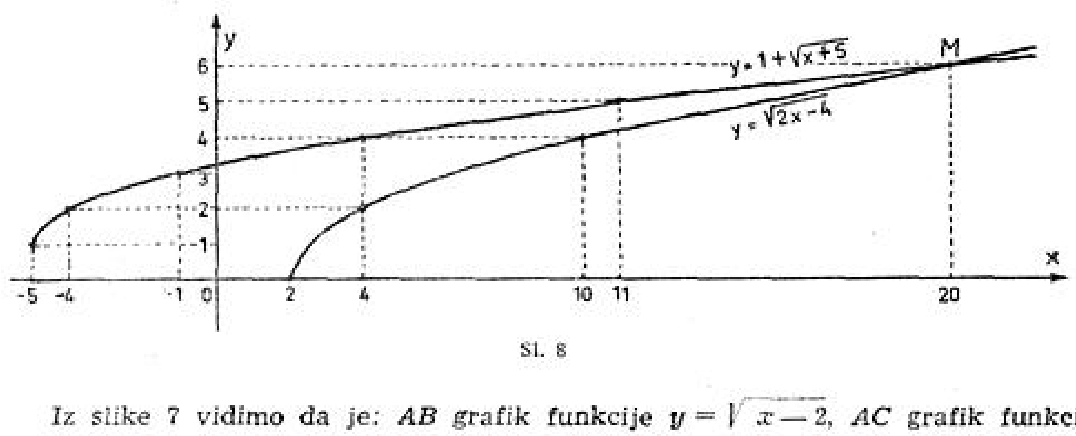
2. Uzmimo sad u obzir iracionalne jednačine oblika $\pm \sqrt{A} \pm \sqrt{B} + C = 0$, gde su A i B linearne funkcije, a C broj.



Sl. 7

Primeri. 1. Rešiti jednačinu $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 2} = 3$. Sastavimo i tri konjugovane jednačine: $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 2} = 3$, $-\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 2} = 3$, $-\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 2} = 3$. Ako svaku od ovih jednačina dvaput kvadriramo dobićemo racionalnu jednačinu $x - 2 = 1$, odakle je $x = 3$. Broj 3 je koren samo prve jednačine, a stran je koren za konjugovane jednačine.

Da bismo rešili geometriski jednačinu $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 2} = 3$, napišimo je ovako $\sqrt{x - 2} = 3 - \sqrt{x + 1}$ i konstruišimo grafike funkcija $y = \sqrt{x - 2}$ i $y = 3 - \sqrt{x + 1}$ (sl. 7). Ova dva grafika seku se u tački M čija je apscisa $x = 3$. Dakle, jednačina $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 2} = 3$ ima rešenje.



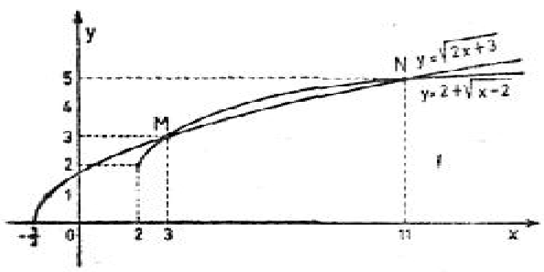
Sl. 8

Iz slike 7 vidimo da je: AB grafik funkcije $y = \sqrt{x - 2}$, AC grafik funkcije $y = -\sqrt{x - 2}$, PS grafik funkcije $y = 3 - \sqrt{x + 1}$ i PQ grafik funkcije $y = 3 + \sqrt{x + 1}$. Iz ove slike možemo zaključiti da konjugovane jednačine date jednačine nemaju rešenja.

2. Rešiti jednačinu $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$. Imamo $\sqrt{2x-4} = 1 + \sqrt{x+5}$. Ako obe strane ove jednačine dvaput kvadriramo dobićemo racionalnu jednačinu $x^2 - 24x + 80 = 0$, čiju su koreni $x_1 = 20$ i $x_2 = 4$. Samo prvi koren zadovoljava datu jednačinu, a drugi koren je stran koren. Lako se može uveriti da je on koren konjugovane jednačine $-\sqrt{2x-4} + \sqrt{x+5} = 1$. Ostale dve konjugovane jednačine nemaju rešenja.

Konstruišimo sad grafike funkcija $y = \sqrt{2x-4}$ i $y = 1 + \sqrt{x+5}$ (sl. 8). Dakle, geometriski smo dobili isto rešenje, kao i analitički.

3. Rešiti jednačinu $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$. Pošto ovu jednačinu napišemo drugačije ovako $\sqrt{2x+3} = 2 + \sqrt{x-2}$ i obe njene strane dignemo na kvadrat dobićemo, posle svođenja, jednačinu $4 \cdot \sqrt{x-2} = x + 1$, ekvivalentnu datoj. Ako obe strane ove poslednje jednačine dignemo na kvadrat, dobićemo, pri uslovu $x - 2 \geqslant 0$, ekvivalentnu jednačinu $x^2 - 14x + 33 = 0$, čiji su koreni $x_1 = 11$ i $x_2 = 3$. Obe vrednosti x zadovoljavaju uslov $x - 2 \geqslant 0$, prema tome one su koreni date iracionalne jednačine.



Sl. 9

Konstruišimo sad grafike funkcija $y = \sqrt{2x+3}$ i $y = 2 + \sqrt{x-2}$ (sl. 9). Iz grafika vidimo da smo dobili ista rešenja, kao i analitički, tj. $x_1 = 11$ i $x_2 = 3$.

Na osnovu rešenih primera iracionalnih jednačina oblika $\pm\sqrt{A} \pm \sqrt{B} + C = 0$, gde su A i B linearne funkcije i C broj, možemo dati ovaj zaključak o broju korena, tj. mogu biti tri slučaja: 1. jednačina ima dva realna korena, 2. jedan realan koren i 3. nema koren.