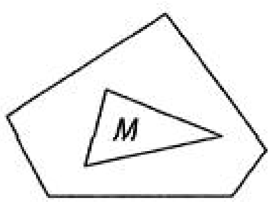
О ЈЕДНОЈ КЛАСИ ЕКСТРЕМАЛНИХ ПРОБЛЕМА У ГЕОМЕТРИЈИ

Владимир Мићић, Београд

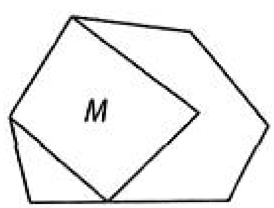
У оквиру додатне наставе, у осмом разреду основне школе, проучава се тема „Неки елементарни екстремални проблеми“. Проблеми којима ћемо се овде бавити не захтевају ништа више од стандардног школског градива.

Подсетимо се да су од латинске речи *extremus*, што на српском значи крајност, изведене многе речи које су се одомаћиле у српском језику и добиле одређено значење. Екстремалним проблемима у геометрији називамо проблеме налажења неког геометријског објекта (линије или фигуре задатог облика) највеће или најмање дужине, површине, запремине, при чему се захтева да тај објекат испуњава и неке додатне услове. Ограничићемо се на проблеме налажења троуглова или многоуглова највеће површине, смештених у конвексне многоуглове. Сви објекти које срећемо припадају једној равни и то не морамо посебно истицати.

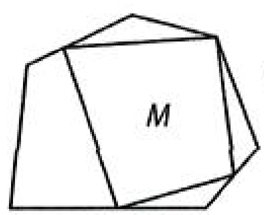
Многоугао M је *смештен* у конвексан многоугао ако се сва његова темена налазе на граници или у унутрашњој области тог конвексног многоугла. Кажемо да је многоугао *уписан* у конвексни многоугао ако се сва његова темена налазе на многоугаоној линији која га ограничава, његовој граници. На сликама 1 и 2 приказани су многоуглови који су смештени у конвексни многоугао и нису у њега уписани а на сликама 3 и 4 многоуглови који су уписани у конвексни многоугао. Јасно је да је сваки многоугао уписан у конвексни многоугао смештен у њега. Обрнуто не важи, што показују слике 1 и 2.



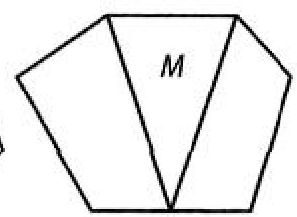
слика 1



слика 2



слика 3



слика 4

Знамо да се, уз уобичајено означавање, површина P троугла ABC може рачунати по једној од формула

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

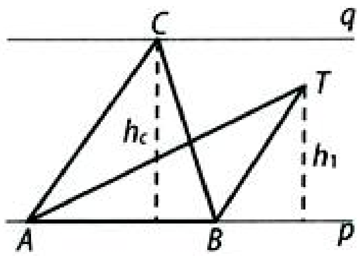
У даљем ћемо користити једноставне чињенице у вези са површинама троуглова.

Нека је задат троугао ABC и тачка T која не припада правој $p(A, B)$ и налази се с исте стране те праве с које и тачка C. Нека је права q паралелна са p и пролази кроз теме C. Означимо са P_1 површину троугла ABT. Важи:

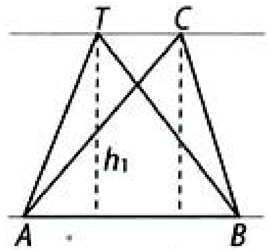
1° Ако се тачка T налази између правих p и q (слика 5), онда је $P_1 < P$;

2° Ако тачка T припада правој q (слика 6), онда је $P_1 = P$;

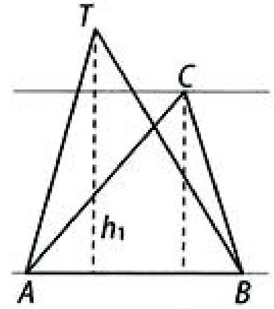
3° Ако се тачка T налази с оне стране праве q с које није права p (слика 7), онда је $P_1 > P$.



слика 5



слика 6

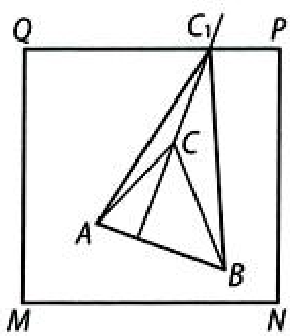


слика 7

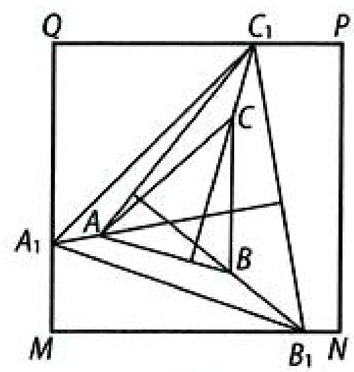
У то се уверавамо користећи формулу $P = \frac{1}{2} c h_c$ и чињеницу да је висина h_1 троугла ABT „спуштена" из темена T на страницу AB у случају 1° мања, у случају 2° іеднака, а у случају 3° већа од h_c.

Пример 1. У задати квадрат сместити троугао највеће површине. Колика је та површина?

Нека је задат квадрат $MNPQ$ странице a и означимо са A, B, C темена троугла који е смештен у тај квадрат. Претпоставимо да се неко од темена троугла, на пример C (слика 8), налази у унутрашњој области квадрата. Доказаћемо да такав троугао не може бити троугао највеће површине смештен у квадрат јер постоји троугао који је смештен у квадрат и веће је површине од троугла ABC. Заиста, нека је h полуправа која садржи теме C и нормална је на праву којој припада страница AB троугла. Она сече границу квадрата у некој тачки C_1 и при томе је, на основу 3°, површина



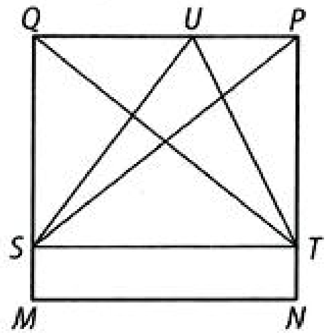
слика 8



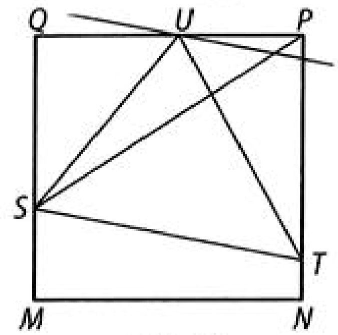
слика 9

роугла ABC_1 већа од површине троугла ABC. Понављајући овакав поступак, по потреби, с теменима B и A, (слика 9) налазимо троугао $A_1B_1C_1$, уписан у квадрат и површине веће од површине троугла ABC. На тај начин се уверавамо да треба у адати квадрат уписати троугао највеће површине. Нека је STU троугао уписан у посматрани квадрат и нека његово теме U припада страници PQ квадрата. Онда, или су троуглови STP, STU и STQ једнаке површине (ако је страница ST троугла паралелна са страницом PQ квадрата (слика 10)) или је један од троуглова STP, STQ

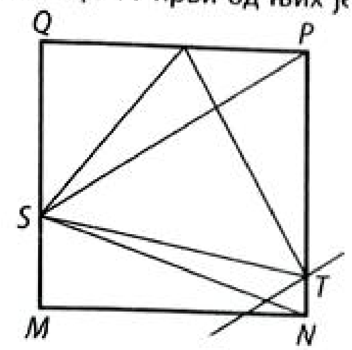
веће, а један од њих мање површине од троугла STU (на слици 11 први од њих је



слика 10



слика 11

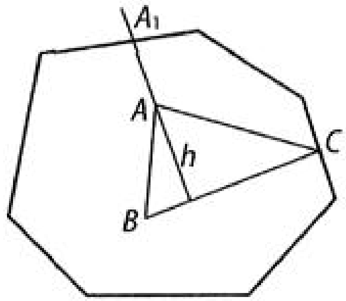


слика 12

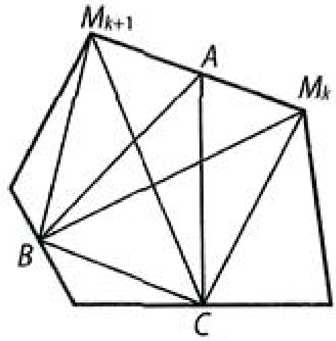
веће а други мање површине). Ако поступак, у ситуацији која је приказана на слици 11, поновимо „поверавајући" улогу истакнутог темена троугла темену T, наћи ћемо троугао SNP (слика 12), чија се два темена поклапају са два суседна темена квадрата, а треће његово теме припада наспрамној страници квадрата. Његова је површина једнака $\frac{1}{2}a^2$ и она је једнака површини свих троуглова чија се два темена поклапају са суседним теменима квадрата а треће припада наспрамној страници квадрата. Имајући у виду раније речено, закључујемо да су сви такви троуглови, а има их бесконачно много, троуглови највеће површине смештени у дати квадрат и њихова је површина $\frac{1}{2}a^2$. Међу тим троугловима се налазе и четири троугла чија су темена било која три темена задатог квадрата.

Пример 2. Колика је површина троугла максималне површине смештеног у задати конвексни многоугао?

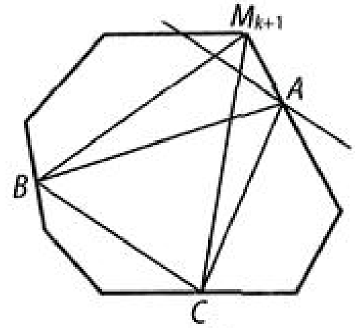
За сваки троугао ABC који је смештен у задати конвексни многоугао $M_1M_2...M_n$ постоји троугао $A_1B_1C_1$, који је уписан у тај многоугао и површина му није мања од површине троугла ABC. Заиста, ако се теме A налази у унутрашњој области многоугла, повуцимо полуправу h која садржи тачку A и нормална је на праву $p(B,C)$. Та полуправа сече многоугаону линију, границу многоугла, у некој тачки A_1 (слика 13). Троугао A_1BC је смештен у многоугао и површина му није мања од површине троугла ABC (зашто?). Понављајући, ако је то неопходно, описани поступак са теменима B и C, налазимо троугао $A_1B_1C_1$, уписан у задати многоугао и површине веће или једнаке површини троугла ABC. Дакле, у задати конвексни многоугао треба уписати троугао највеће површине. Да бисмо растеретили означавање, посматрајмо троугао ABC који је уписан у конвексни многоугао $M_1M_2...M_n$. Нека теме A припада страници M_kM_{k+1} многоугла док темена B и C припадају неким другим двема страницама многоугла. Ако је страница M_kM_{k+1} паралелна са BC (слика 14), онда су површине троуглова ABC, M_kBC и $M_{k+1}BC$ једнаке. Ако то није случај, онда је површина једног од троуглова M_kBC, $M_{k+1}BC$ већа а једног од њих мања од површине троугла ABC; препознајемо наше случајеве 1°, 2° и 3°. На слици 15 је површина првог од њих мања а површина другог већа од површине троугла ABC. Дакле, постоји троугао $A'BC$, назваћемо га првим, који је уписан у посматрани конвексни многоугао, такав да му се једно од темена поклапа с једним од темена тог многоугла а површина му није мања од површине троугла ABC.



слика 13

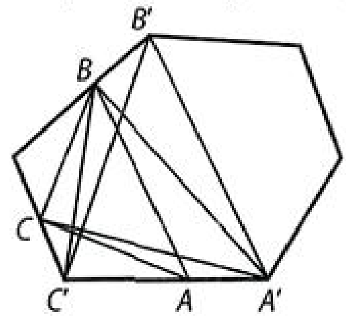


слика 14



слика 15

Ако описани поступак применимо на тако добијени први троугао, добићемо други троугао $A'B'C$, који је уписан у задати конвексни многоугао, такав да му се два темена поклапају с теменима тог многоугла а површина му није мања од површине тог троугла. Понављајући овај поступак још један пута добићемо трећи троугао $4'B'C'$, чија се сва три темена поклапају с нека три темена конвексног многоугла а површина му није мања од површине другог троугла, па због тога није мања од површине првог од добијених троуглова а самим тим није мања ни од површине полазног троугла (слика 16). На тај начин смо доказали да површина троугла, који је



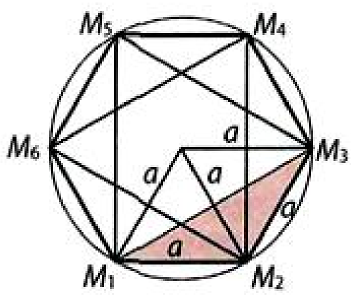
слика 16

:мештен у задати конвексни многоугао и максималне је површине, није већа од ıајвеће од површина троуглова чија су темена три од темена тог многоугла. У ıеким случајевима постоји тачно један такав троугао, али их може бити и неколико, ıа чак и бесконачно много. Дакле, да бисмо одредили колика је тражена површина реба одредити површине свих троуглова чија су темена по три темена задатог конвексног многоугла и наћи највећу од њих. То може бити технички захтеван ıосао јер таквих троуглова у случају конвексног четвороугла има 4, у случају конвексног петоугла има 10, у случају конвексног шестоугла има 20, ... (зашто?).

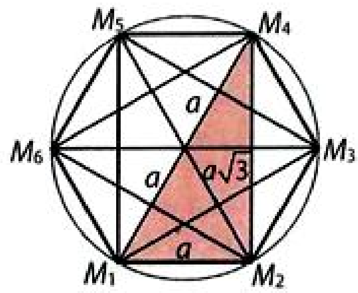
Јасно је да смо у примеру 1 решавали специјални случај овог проблема; конвексни n-тоугао је био правилни четвороугао (квадрат).

Пример 3. У задати правилни шестоугао сместити троугао највеће површине. Колика је његова површина?

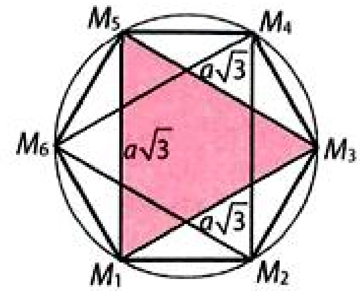
Користећи се претходним примером закључујемо да такав троугао треба ражити међу троугловима чија су темена по три темена правилног шестоугла $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ странице a. У даљем ћемо троугао $M_1M_2M_3$ означавати са (1, 2, 3), роугао $M_1M_2M_4$ са (1, 2, 4), ... Све троуглове чија су темена по три темена шестоугла можемо поделити у три класе. Првој класи припада шест троуглова чија су темена по три узастопна темена тог шестоугла (слика 17): (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 1), (6, 1, 2). Они су подударни а површина сваког од њих једнака је



слика 17



слика 18



слика 19

$\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Другој класи припада дванаест троуглова чија су по два темена суседна темена шестоугла а треће теме није суседно ниједном од њих (слика 18): (1, 2, 4), (1, 2, 5), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (3, 4, 6), (3, 4, 1), (4, 5, 1), (4, 5, 2), (5, 6, 2), (5, 6, 3), (6, 1, 3), (6, 1, 4). Они су исто тако подударни а површина сваког од њих једнака је $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

Најзад, трећој класи припада два троугла чија су сва три темена несуседна темена шестоугла (слика 19): (1, 3, 5), (2, 4, 6). И они су подударни а њихова је површина једнака је $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$. Због $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$ закључујемо да постоје два тражена троугла највеће површине смештена у правилни шестоугао. То су троуглови $M_1M_3M_5$ и $M_2M_4M_6$ а површина сваког од њих једнака је $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија