Јенс Карстенсен, Данска
Алија Муминагиќ, Данска

ТРИГОНОМЕТРИЈА И ФИБОНАЧИЕВИ БРОЕВИ

Во оваа кратка статија ќе покажеме како може да се дојде до Фибоначиевите броеви со помош на формулите за претвогање на збир на тригонометриски функции во производ.

Да се потсетиме: броевите определени со

$$F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \text{, за } n\geq 1 \tag{1}$$

ги нарекуваме Фибоначиеви броеви.

Од друга страна, кога во познатата формула

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

која важи за секои α,β ставиме $\alpha=\frac{(n+1)x}{2}, \beta=\frac{(n-1)x}{2}$, $n\in\mathbb{N}$, добиваме

$$\sin\frac{(n+1)x}{2}+\sin\frac{(n-1)x}{2}=2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2},$$

т.е.

$$2\sin\frac{(n+1)x}{2}=4\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{(n-1)x}{2} \tag{2}$$

Ако сега означиме $p_n=2\sin\frac{nx}{2}, n=0,1,2,3,...$ и $q=\cos\frac{x}{2}$, добиваме дека важи $p_2=p_1q-p_0, p_3=p_2q-p_1$ и воопшто од (2) следува

$$p_{n+1}=p_nq-p_{n-1},\ n=1,2,3,\dots. \tag{3}$$

Користејќи ја формулата (3) можеме членовите на низата $\{p_n\}$ да ги изразиме преку p_1 и q:

$$p_1=p_1,$$
$$p_2=p_1q-p_0=p_1q,$$
$$p_3=p_2q-p_1=(p_1q)q-p_1=p_1(q^2-1),$$
$$p_4=p_3q-p_2=p_1(q^2-1)q-p_1q=p_1(q^3-2q),$$
$$p_5=p_4q-p_3=p_1(q^3-2q)q-p_1(q^2-1)=p_1(q^4-3q^2+1)$$
$$p_6=p_5q-p_4=p_1(q^4-3q^2+1)q-p_1(q^3-2q)=p_1(q^5-4q^3+3q)$$
$$p_7=p_6q-p_5=p_1(q^5-4q^3+3q)q-p_1(q^4-3q^2+1)=p_1(q^6-5q^4+6q^2-1)$$

....

Сега, да ги разгледаме изразите $\frac{p_n}{p_1}$ како полиноми по q и занемарувајќи ги собирците кои се еднакви на нула, да ја формирамне следнава табела од апсолутните врености на коефициентите на тие полиноми.

n/j	0	1	2	3	4	Σ
1	1					1
2	1					1
3	1	1				2
4	1	2				3
5	1	3	1			5
6	1	4	3			8
7	1	5	6	1		13
8	1	6	10	4		21

Забележуваме дека збировите на коефициенти во секој ред на табелата се еднакви на Фибоначиевите броеви. Попрецизно, ако со $B(n,j)$ го означиме коефициентот кој стои во $n-$тиот ред и $j-$тата колона на табелата, тогаш важи следнава формула за Фибоначиевите броеви

$$F_n = \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]} B(n,j)\,. \tag{4}$$

На пример,

$$F_7 = B(7,0)+B(7,1)+B(7,2)+B(7,3) = 1+5+6+1 = 13\,.$$

Доказот дека оваа формула е точна за секој n може да се изведе со помош на индукција (на пример, види [2]).

Забелешка 1. Со користење на формулата за претворање на збирот на косинуси во производ, може, слично на формулата (3), да се изведе рекурентна формула со која $u_n = 2\cos\frac{nx}{2}$ се изразува преку u_{n-1}, u_{n-2} и $q = 2\cos\frac{x}{2}$. Потоа, од неа може да се добие формула аналогна на (4), за таканаречените Лукасови броеви

$$L_1 = 1, L_2 = 3, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \text{ за } n \geq 1,$$

(види [2]). Врската меѓу Фибоначиевите и Лукасовите броеви е дадена со

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4\cdot(-1)^n\,.$$

Забелешка 2. Се смета дека формулите од видот (3) за $\sin\frac{nx}{2}$ и $\cos\frac{nx}{2}$ прв ги користел Виет.

Литература

[1] J. Carstensen, *Blanded om Fibonacci-og Lucastal,* Matematik Magasinet 66 (2013)

[2] T. Koshy, *Trigonometric Functions and Fibonacci and Lucas Arrays*, Mathematical Spectrum 42, 3 (2009)