Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

Б. Маринковић

ШТА ЈОШ ТРЕБА ЗНАТИ О АЛГЕБАРСКИМ ИЗРАЗИМА

Овде се нећемо упуштати у детаљно излагање о алгебарским изразима, већ ћемо истаћи угларном оно што неким ученицима причињава извесну тешкоћу, а у уџбеницима није у довољној мери наглашено.

I

1. Шта је алгебарски израз

Алгебарским изразом називамо скуп бројева, посебних или општих, повезаних међусобно знацима рачунских операција (рачунских радњи); разуме се, у једном алгебарском изразу не морају бити заступљене све рачунске операције, на пример:

$$a+b; \quad 5\,ax^2; \quad \frac{4}{p-3}; \quad \frac{m-n}{2\,(m+n)}; \quad 9\cdot(8-3); \quad 5{,}9\,x^2+\frac{1}{2}\sqrt{y}\,.$$

Ако у алгебарском изразу нема других операција осим сабирања, одузимања, множења, дељења и степеновања целим бројем, онда је израз рационалан. Горе наведени изрази, осим последњег, су рационални. Рационални алгебарски израз зваћемо разломљеним или целим, већ према томе да ли тај израз садржи или не садржи општи број или израз као делилац. Од напред наведених израза цели рационални изрази су први, други и пети; разломљени рационални изрази су трећи и четврти. О мономима и полиномима свакако знате и у уџбенику имате, тако да о томе овде нећемо детаљно говорити.

2. Нумеричка (бројна) вредност алгебарског израза

Нумеричка (бројна) вредност алгебарског израза јесте број који се добија када у том изразу уместо општих бројева (слова) ставимо њихове дате бројне вредности и извршимо с њима назначене операције. Бројна вредност алгебарског израза зависи од бројних вредности општих бројева у том изразу (функција, употребљена слова су аргументи).

На пример, бројна вредност израза $A = 2m^2 - n$ за $m = 3$ и $n = 5$ биће

$$A = 2 \cdot 3^2 - 5 = 2 \cdot 9 - 5 = 18 - 5 = 13,$$

а за $m = -1{,}5$ и $n = 4$ добило би се

$$A = 2(-1{,}5)^2 - 4 = 2 \cdot 2{,}25 - 4 = 4{,}5 - 4 = 0{,}5.$$

3. Има ли увек сваки алгебарски израз смисла

У алгебарском изразу општи бројеви (променљиве, аргументи) могу узимати само оне бројне вредности за које рачунске операције назначене у изразу и цео израз имају смисла. Такве вредности општих бројева (променљивих) за које алгебарски израз има смисла зову се њихове допуштене вредности.

Примери:

1) Допуштене вредности за опште бројеве у изразима

$$x + 5, \quad (2a - 3)^2, \quad (4 - 3x) : 5,$$

јесу ма које вредности за опште бројеве у њима.

2) У изразу $\dfrac{8}{a-3}$ допуштене вредности за a биће све вредности за a, осим за $a = 3$ (јер тада израз $a - 3$ постаје једнак нули, а нула не може да буде делилац!).

3) Израз $\dfrac{3a+2}{5(a-b)}$ нема смисла само кад је $a-b=0$, тј. $a=b$. За све вредности за $a\neq b$ дати израз има одређену вредност.

4) Израз $\dfrac{2}{x-x}$ лишен је смисла за свако x.

5) Ученик је купио x свески по 2 нова динара комад и књигу за 5 нових динара. Вредност коју је ученик платио дата је изразом $2\cdot x+5$ (н. динара). Према природи величина о којима је у задатку реч, овде x (количина свески) може бити само природан број. Значи, скуп допуштених вредности за x јесте скуп природних бројева. Уколико о природи општих бројева у наведеном изразу не би било ништа речено, онда би x могао бити који било број.

4. Редослед рачунских операција

Као што знате, сабирање и одузимање називамо операцијама првог реда (првог степена), множење и дељење-операцијама другог реда (другог степена), а степеновање и израчунавање корена-операцијама трећег реда (трећег степена). Правила о редоследу рачунских операција (рачунских радњи) при израчунавању вредности бројног израза, која сте учили у аритметици, важе и у алгебри. Да се подсетимо.

I. Ако у изразу немамо заграда:

— операције једног истог реда обављају се оним редоследом како су написане; на пример: $18-14+5=4+5=9$; $20:4\cdot 3=5\cdot 3=15$;

— ако израз садржи операције различитог реда, онда се прво врше операције вашег па нижег реда (значи, кад у изразу, рецимо, не би било других рачунских операција осим четири основне, онда бисте прво морали извршити множења и дељења, па тек онда сабирања и одузимања); на пример:

$$8+32:4-2=8+8-2=16-2=14;$$
$$4{,}5\cdot 6-1{,}5:3+0{,}5=27-0{,}5+0{,}5=27;$$
$$2\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\sqrt{16}-3^2=2\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot 4-9=2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-9=-6.$$

II. Ако треба одступити од наведених правила, тј. извршити најпре операције нижег реда, онда се то назначује заградама. При томе се прво обављају рачунске операције са бројевима у заградама (и то прво у малим, онда у средњим, па у великим заградама). Кад више не будемо имали заграда, рачунаћемо по правилима наведеним под I. Ево примера:

1) $9-2\cdot 3=9-6=3$ није исто што и $(9-2)\cdot 3=7\cdot 3=21$.

2) $(13+2)\cdot(7-3)=15\cdot 4=60$, али $13+2\cdot 7-3=13+14-3=24$.

3) $[(6+3)-2]\cdot 5-2=[9-2]\cdot 5-2=7\cdot 5-2=35-2=33$.

4) Из двају места истовремено су један другом у сусрет пошла два пешака. Први прелази a km на час а други b km на час. Колико су удаљена та два места ако су се пешаци срели после t часова? (Посебне вредности: $a=5$ km/h, $b=4$ km/h, $t=3$ часа).

За 1 час оба пешака пређу $(a+b)$ km, а за t часова прећи ће

$(a+b)\cdot t$ километара.

Зашто не би било добро написати: $a+b\cdot t$?

За дате посебне вредности добили бисмо $(5+4)\cdot 3=27$ (km).

Напомена. — Ако је у датом изразу употребљена и разломачка црта, онда треба имати у виду да она замењује заграду па, према томе, треба посебно израчунати вредност израза у бројиоцу (бројнику) и посебно израза у имениоцу (називнику), па први резултат поделити другим; на пример:

$$\frac{a+b}{a-b}=(a+b):(a-b), \text{ где је } a\neq b \text{ (зашто?)}.$$

За $a=36$, $b=24$ имаћемо:

$$\left.\frac{a+b}{a-b}\right|_{\substack{a=36\\ b=24}}=\frac{36+24}{36-24}=\frac{60}{12}=5.$$

II

5. О операцијама са алгебарским изразима

Претпоставимо да треба сабрати два монома A и B. Извршити ту операцију не значи само наћи бројну вредност резултата сабирања. Ту бројну вредност било би могуће наћи кад би биле дате бројне вредности променљивих A и B. Овде те вредности нису дате. Зато, ако и напишемо израз $A+B$, онда ће то и означавати да смо сабрали мономе A и B или, другачије речено, да смо написали (назначили) њихов збир. Тај се израз, уколико је могуће, даље упрошћава (види даље!). То се односи и на друге операције са изразима; на пример, кад напишемо израз $(a+b-5)(x+y)$, онда имамо множење израза $a+b-5$ и $x+y$, тј. назначили смо њихов производ.

Значи, обављање операција са алгебарским изразима састоји се у њиховом повезивању (спајању) знаком вршене операције, тј. састоји се у састављању новог израза помоћу те операције.

Пример 1. — Одузимање монома $(-5x)$ од монома $8a^2b$ записаћемо овако:

$$8a^2b-(-5x).$$

Пример 2. — Дељење полинома $x+y-2$ полиномом $m+n$ записаћемо овако:

$$(x+y-2):(m+n) \quad \text{или} \quad \frac{x+y-2}{m+n}.$$

Који услов мора бити испуњен да би ово дељење имало смисла? (Види стр. 36—37, „Мат. лист" II. 2).

Пример 3. — Израз $(a+3b)+(3a+2b)$ представља збир полинома $a+3b$ и $3a+2b$. Може ли се овај збир написати и другачије?

6. О трансформацији алгебарског израза

Пример 1. — Нека су дата два алгебарска израза:

$$2(x-1)+5 \quad \text{и} \quad 2x+3.$$

Саставимо таблицу вредности сваког од тих израза за разне бројне вредности променљиве x:

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	20	$115{,}5$
$2(x-1)+5$	-3	-1	0	1	3	5	7	8	9	43	234
$2x+3$	-3	-1	0	1	3	5	7	8	9	43	234

Видимо да су за све вредности које смо давали променљивој x одговарајуће вредности обају датих израза једнаке. То ће бити и за сваку другу вредност x. У то се можемо уверити кад први израз на основу закона дистрибуције напишемо овако:

$$2(x-1)+5=2\cdot x-2\cdot 1+5,$$

односно, кад извршимо назначене операције,

$$2x-2+5=2x+3.$$

Према томе, после упрошћавања први израз је постао сасвим исти као и други, па је сада јасно да су за сваку вредност промењиве x и вредности оба дата израза једнаке.

Пример 2. — Ако је дат израз $(a+3b)+(3a+2b)$ — збир два полинома — онда га, на основу асоцијативног и комутативног закона сабирања, можемо написати редом у овим облицима:

$$(a+3b)+(3a+2b);$$

$$a+3b+3a+2b;$$

$$a+3a+3b+2b;$$

$$a+a+a+a+b+b+b+b+b;$$

$$(a+a+a+a)+(b+b+b+b+b);$$

$$4a+5b.$$

Изрази $(a+3b)+(3a+2b)$ и $4a+5b$ једнаки су међусобно за било које вредности бројева a и b.

Два алгебарска израза чије су бројне (нумеричке) вредности једнаке за све допуштене вредности општих бројева (промењљивих, аргумената) које они садрже, називају се *идентички једнаким* или краће, *идентичним*. (Допуштене вредности општих бројева у изразу, како је напред речено, су оне за које дати изрази имају смисла; скуп тих вредности често се назива област или домен дефинисаности дотичног израза).

Ако два идентична израза вежемо знаком једнакости добијамо *идентитет*. Зато кажемо да је идентитет једнакост која је исправна (ваљана) за све вредности општих бројева за које изрази на обе стране имају смисла; то су такође и ваљане једнакости бројних израза који не садрже опште бројеве.

Примери

1) Изрази $(a+3b)+(3a+2b)$ и $4a+5b$ идентички су једнаки, а једнакост $(a+3b)+(3a+2b)=4a+5b$ јесте идентитет.

2) Напред наведени изрази $2(x-1)+5$ и $2x+3$ такође су идентички једнаки.

3) Изрази $\frac{x^2-4}{x-2}$ и $x+2$ идентички су једнаки за све вредности промењиве x, осим за $x=2$, јер за ту вредност други

израз има вредност 4, а први израз нема смисла, није одређен (јер се нулом делити не може). Значи, $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$ јесте идентитет за свако x осим за $x=2$.

4) Једнакост $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ важи, тј. ваљана је за ма које вредности општих бројева a и b; значи, то је идентитет.

5) Идентитети су такође и једнакости и то само ваљане једнакости бројних израза који не садрже променљиве, нпр. $4+2=2\cdot 3$.

Идентитети су и једнакости потпуно истих израза, на пример,

$$x^2+4=x^2+4.$$

Они нам говоре о томе да је сваки израз једнак самом себи и нису од нарочитог интереса. То су тзв. тривијални идентитети.

6) Са идентитетима сте се и досад сретали. Најпростији, а уједно и основни идентитети јесу закони за сабирање и множење:

$$a+b=b+a; \quad (a+b)+c=a+(b+c);$$
$$ab=ba; \quad (ab)\,c=a\,(bc); \quad (a+b)\,c=ac+bc.$$

У алгебри је често потребно да неки израз заменимо другим, њему идентичним. На пример, израз

$$30\,a+34\,a+36\,a$$

на основу закона дистрибуције можемо написати:

$$30\,a+34\,a+36\,a=(30+34+36)\,a.$$

Али збир у загради износи 100, те имамо идентитет

$$30\,a+34\,a+36\,a=100\,a.$$

Израз $100\,a$ простији је од датог израза. Кажемо да смо израз $30\,a+34\,a+36\,a$ *трансформисали* у израз $100\,a$.

Трансформисати дати алгебарски израз значи саставити нови алгебарски израз, на изглед различит од датог, идентички једнак датом изразу. Према томе, можемо рећи да идентичка трансформација неког израза јесте замена тог израза другим њему идентичним изразом.

Како сваком алгебарском изразу за допуштене вредности променљивих (општих бројева) у њему одговара његова нумеричка вредност, то следи да на алгебарске изразе можемо применити све познате законе и својства аритметичких операција. Према томе, *примењујући законе рачунских операција и правила* која из њих произилазе (својства рачунских операција) вршимо *идентичне трансформације датог алгебарског израза.*

Често се уместо термина „трансформисати израз" употребљава термин „упростити (поједноставити) израз", пошто се при идентичној трансформацији добива по правилу једноставнији израз или, пак, израз који је у извесном погледу погоднији за испитивање датог израза. Свакако сте то већ запазили у напред наведеним примерима, а можете то још видети и на примерима у рубрици „Одабрани задаци" (види, на пример, задатке: 18—25; 83—87; 144—148; 188—189; 193; 238—242).

Свака трансформација, тј. прелаз од једног израза на други израз њему идентички једнак, врши се у циљу решавања неког задатка. На пример, посматрајући полином

$$x^2-6x+14, \tag{1}$$

тешко ћете пронаћи ону вредност променљиве x за коју тај *полином (у овом случају трином) има најмању вредност.* (Лако се, наиме, можеш уверити да дати полином за разне вредности x узима, уопште узевши, разне *бројне вредности; једна од тих* вредности је мања од свих осталих. Како ћеш пронаћи ту вредност и коју бројну вредност има x у том случају? Мало је вероватно да ћеш то пробањем утврдити). Међутим, ако бисмо умели тај полином да трансформишемо у полином облика

$$5+(x-3)^2, \tag{2}$$

онда бисмо одмах закључили да ће најмању вредност он имати за $x=3$.

Како смо до тога дошли?

Да је израз (2) идентички једнак изразу (1) лако се можете уверити. Према томе је довољно наћи ону вредност x за коју ће израз (2) имати најмању вредност. У том је изразу први сабирак сталан број, па ће тај збир имати најмању вредност кад је други сабирак $(x-3)^2$ најмањи, а то ће бити кад је тај израз једнак нули. Мањи од нуле, тј. негативан бити не може, јер квадрат од 0 је 0, а квадрат сваког другог броја је позитиван; но, израз $x-3$ биће једнак нули само кад је $x=3$.

Према томе, *полином (1) имаће најмању вредност* за $x=3$. *Та најмања* вредност једнака је 5. То ћете добити када ставите $x=3$ у (1) или (2); боље је замењивање извршити у (2) (зашто?). Према томе, проблем је само у томе да се израз (1) трансформише у израз (2).

Трансформација израза $(a+3b)+(3a+2b)$ у израз $4a+5b$ узета сама за себе нема неку велику важност. Али ипак је она од користи, јер дати израз своди на простији облик. Када извршена трансформација доводи дати израз на простији облик онда се каже да смо дати израз упростили.

Напред је напоменуто (стр. 70) да се вршење операција са алгебарским изразима састоји у назначивању дотичне операције са тим изразима (састављање новог израза спајањем датих израза знаком дотичне операције). Међутим, најчешће се тако настали израз трансформише у једноставнији, њему идентичан израз.

На пример, $(4ab)\cdot(3a)$ значи множење монома $4ab$ с мономом $3a$. Извршивши трансформисање на основу комутативног и асоцијативног закона множења, добиће се да је $(4ab)\cdot(3a) = 12a^2b$.

Правила трансформисања израза обично се формулишу као правила рачунских *операција*, јер је свако од њих у вези са одговарајућом операцијом.