**Ристо Малчески**
**Скопје**

# ТЕОРЕМА НА МЕНЕЛАЈ

Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се колинеарни вектори, тогаш постои реален број $\lambda$ таков, што $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$. Во натамошните разгледувања за реалниот број формално ќе ја прифатиме ознаката $\lambda=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$.

Бидејќи равенството $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$ е еквивалентно на равенството $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}$ имаме $\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{\lambda}$.

**Дефиниција.** Нека страната $AB$ на $\Delta ABC$ лежи на правата $(p)$. Точката $P$ ја нарекуваме точка на Менелај за страната $AB$ ако $P\in(p)$ и $P\not\equiv A,B$. Аналогно се дефинираат точките на Менелај за страните $BC$ и $CA$ на $\Delta ABC$.

**Теорема (Менелај).** Нека $D,E$ и $F$ се точки на Менелај за страните $BC,CA$ и $AB$ на произволен $\Delta ABC$, соодветно. Точките $D,E$ и $F$ се колинеарни ако и само ако $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=-1$.

**Доказ.** Нека $D,E$ и $F$ се точки на Менелај за страните $BC,CA$ и $AB$, чии афикси се $p,q$ и $r$, соодветно. Ако $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}=\lambda$, $\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=\mu$, $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\nu$, тогаш од

$$\overrightarrow{BD}=p-b,\quad \overrightarrow{DC}=c-p,\quad \overrightarrow{CE}=q-c,\quad \overrightarrow{EA}=a-q,\quad \overrightarrow{AF}=r-a,\quad \overrightarrow{FB}=b-r$$

за афиксите $p,q$ и $r$ на точките $D,E$ и $F$ добиваме

$$p=\frac{b+\lambda c}{1+\lambda},\quad q=\frac{c+\mu a}{1+\mu},\quad r=\frac{a+\nu b}{1+\nu}. \tag{1}$$

Точките $D,E$ и $F$ се колинеарни ако и само ако $\frac{p-q}{\bar{p}-\bar{q}}=\frac{r-q}{\bar{r}-\bar{q}}$. Ако во последното равенство од (1) ги замениме вредностите за $p,q$ и $r$ и добиеното равенство го помножиме со $(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)$, после средувањето добиваме

$$(1+\lambda\mu\nu)(a\bar{b}+b\bar{c}+c\bar{a}-b\bar{a}-c\bar{b}-a\bar{c})=0. \tag{2}$$

Значи, точките $D,E$ и $F$ се колинеарни ако и само ако е исполнето равенството (2). Конечно, точките $D,E$ и $F$ се колинеарни ако и само ако $1+\lambda\mu\nu=0$ (зошто?), односно ако и само ако

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=-1.$$

**Пример.** Даден е $\Delta ABC$ и точки $D$ и $E$ на страните $BC$ и $CA$, соодветно, такви, што $\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{AB}$. Низ точката $D$ повлекуваме права $(l)$ паралелна на $AB$. Ако $M=(l)\cap BE$ и $F=CM\cap AB$, тогаш

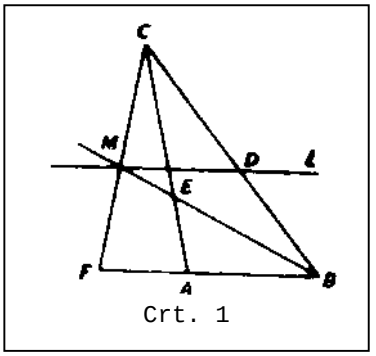
$$\overline{AB}^3=\overline{AE}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{CD}.$$

**Решение.** Да го разгледаме $\Delta ACF$ (црт. 1). Точките $E,M$ и $B$ се точки на Менелај за страните $AC,CF$ и $AF$, соодветно и по услов се колинеарни. Од теоремата на Менелај имаме

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BF}}\cdot\frac{\overrightarrow{FM}}{\overrightarrow{MC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=-1,$$

од што следува

$$\frac{\overline{AB}}{BF}\cdot\frac{\overline{FM}}{MC}\cdot\frac{\overline{CE}}{EA}=1.$$



Crt. 1

Бидејќи $DM\parallel BF$ добиваме $\frac{\overline{FM}}{MC}=\frac{\overline{BD}}{DC}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме $\frac{\overline{AB}}{BF}\cdot\frac{\overline{BD}}{DC}\cdot\frac{\overline{CE}}{EA}=1$ и како $\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{AB}$ добиваме $\overline{AB}^3=\overline{AE}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{CD}$. ♦

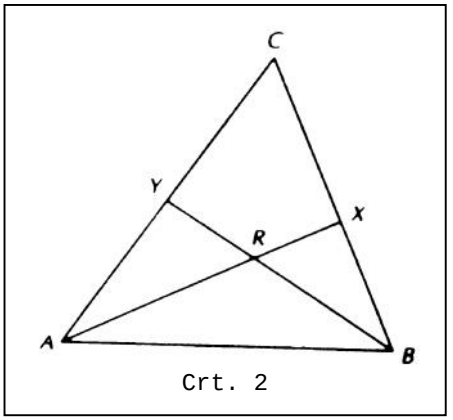
**Пример.** Даден е $\Delta ABC$ и точки $X$ и $Y$ на страните $BC$ и $CA$, соодветно. Нека $R=AX\cap BY$ и $\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YP}}=p,\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}}=q$, каде $0<p<q$.

Пресметајте го односот $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}$.

**Решение.** Да го разгледаме $\Delta AXC$. Точките $B,R$ и $Y$ се точки на Менелај за страните $CX,AX$ и $AC$, соодветно и по услов се колинеарни (црт. 2). Според теоремата на Менелај имаме $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}=-1$. Значи,

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{XB}}=\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}=-\frac{q}{p}$$

и како $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$ и $\overrightarrow{XB}=-\overrightarrow{BX}$ со замена во последното равенство добиваме $\frac{\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}}{\overrightarrow{BX}}=\frac{q}{p}$ односно $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}=\frac{p}{q-p}$. ♦



Crt. 2

**Пример.** Даден е правоаголен $\Delta ABC$ со прав агол во темето $B$ и страни $\overline{AB}=4,\overline{BC}=3$. Точката $E$ е средина на страната $AB$, а точката $D$ лежи на

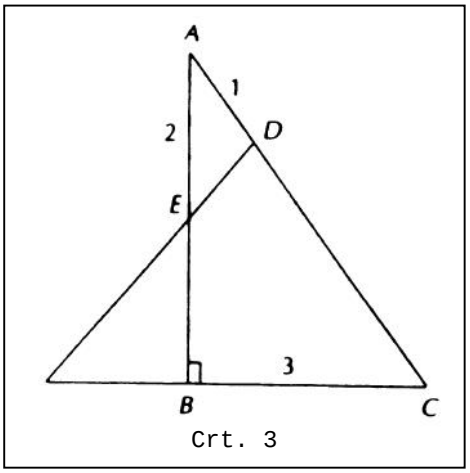
страната $AC$ и $\overline{DA}=1$. Нека $F=DE\cap BC$. Најдете ја должината на отсечката $BF$.

**Решение.** Да го разгледаме $\Delta ABC$ (црт. 3). Точките $D, E$ и $F$ се точки на Менелај за страните $CA, AB$ и $BC$, соодветно и по услов се колинеарни. Од теоремата на Менелај имаме

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\cdot\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=1. \qquad (3)$$

Од условот на задачата наоѓаме $\overline{FC}=\overline{FB}+\overline{CB}=\overline{FB}+3$, $\overline{DA}=1$ и $\overline{AE}=\overline{EB}=2$. Понатаму, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{CA}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AB}^2}=5.$$



Crt. 3

Според тоа, $\overline{CD}=\overline{CA}-\overline{DA}=4$ и ако замениме во (3) после средувањето наоѓаме $\overline{FB}=1$. ♦

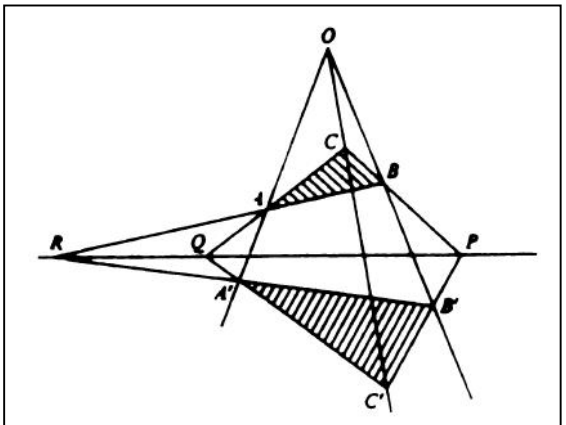
## ДВЕ ВАЖНИ ПОСЛЕДИЦИ НА ТЕОРЕМА НА МЕНЕЛАЈ

Во овој дел, користејќи ја теоремата на Менелај, ќе ја докажеме теоремата на Дезарг која претставува фундаментален резултат во проективната геометрија. Исто така, ќе ја докажеме и теоремата на Паскал за шестаголник впишан во кружница.

**Дефиниција.** Триаголниците $ABC$ и $A'B'C'$ ги нарекуваме **копларни** ако правите $AA', BB'$ и $CC'$ се сечат во една точка.

Триаголниците $ABC$ и $A'B'C'$ ги нарекуваме **коосни** ако пресечните точки на правите $BC$ и $B'C'$, $CA$ и $C'A'$, $AB$ и $A'B'$ лежат на една права.

**Теорема (Дезарг).** Триаголниците $ABC$ и $A'B'C'$ се копларни ако и само ако се



Crt. 4

коосни.

**Доказ.** Нека триаголниците $ABC$ и $A'B'C'$ се кополарни и нека правите $AA', BB'$ и $CC'$ се сечат во точката $O$. Со $P, Q, R$ да ги означиме пресеците на правите $BC$ и $B'C'$, $CA$ и $C'A'$, $AB$ и $A'B'$ соодветно (црт. 4). Од теоремата на Менелај, применета на триаголниците $BCO, CAO$ и $AOB$ следува

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{B'B}} = -1$$

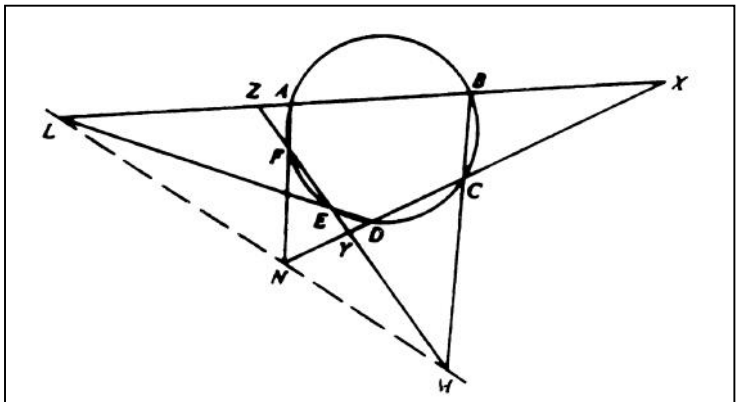
$$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{C'C}} = -1$$

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{A'A}} = -1$$

Ако ги помножиме горните равенства добиваме $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$ и од што заради теоремата на Менелај заклучуваме дека точките $P, Q$ и $R$ се колинеарни. Значи, триаголниците $ABC$ и $A'B'C'$ се коосни.

Обратно, нека претпоставиме дека $P, Q$ и $R$ се колинеарни и нека правите $AA'$ и $BB'$ се сечат во точката $O$. Сега триаголниците $AQA'$ и $BPB'$ се кополарни, па затоа се коосни. Според тоа, точките $O, C$ и $C'$ се колинеарни, што значи коосните триаголници се кополарни. ♦

**Теорема (Паскал).** Нека шестаголникот $ABCDEF$, чии спротивни страни не се колинеарни е впишан во кружница. Со $L, M, N$ да ги означиме пресечните точки на трите парови спротивни страни $AB$ и $ED$, $BC$ и $EF$, $FA$ и $CD$, соодветно. Тогаш, точките $L, M, N$ се колинеарни.




Crt. 5

**Доказ.** Нека $X, Y, Z$ се пресечните точки на $AB$ и $CD$, $CD$ и $EF$, $EF$ и $AB$, соодветно (црт. 5). Точките $D, E, L; F, A, N; B, C, M$ се точките на Менелај за $\Delta XYZ$, па од теоремата на Менелај добиваме

$$\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZE}}{\overrightarrow{EY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YD}}{\overrightarrow{DX}}=-1,\qquad \frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZF}}{\overrightarrow{FY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}=-1,\qquad \frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CX}}=-1.$$

Ако ги помножиме горните равенства добиваме

$$\left(\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{ZE}}{\overrightarrow{EY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YD}}{\overrightarrow{DX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZF}}{\overrightarrow{FY}}\cdot\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CX}}=-1. \qquad (1)$$

Понатаму, ако се искористи степенот на точките $X, Y, Z$ во однос на кружницата, тогаш лено од геометриската интерпретација на комплексните броеви следува

$$\overrightarrow{ZE}\cdot\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{AZ}\cdot\overrightarrow{BZ},\quad \overrightarrow{EY}\cdot\overrightarrow{FY}=\overrightarrow{YD}\cdot\overrightarrow{YC},\quad \overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{DX}=\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}.$$

Ако замениме во (1) добиваме $\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}=-1$, што според теорема на Менелај значи дека точките $L, M$ и $N$ се колинеарни. ♦