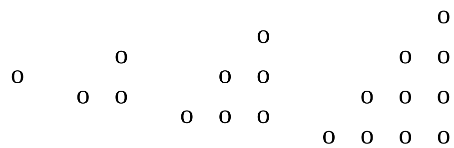
Ристо Малчески,

ТРИАГОЛНИ БРОЕВИ

Броевите на точките, распоредени во облик на триаголник (црт. 1), определуваат низа на таканаречени ***триаголни броеви***. Таа почнува со броевите 1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, 15, 21, 28, 36 итн.



Црт. 1

Со t_n да го означиме $n-$от триаголен број. Тогаш,

$$\begin{aligned}2t_n &= 2(1+2+...+n)\\ &= (1+n)+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]...+[(n-1)+2]+(n+1)\\ &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+...+(n+1)}_{n-\text{pati}} = n(n+1)\end{aligned}$$

од каде наоѓаме

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Во продолжение на оваа работа ќе решиме неколку задачи за триаголни броеви.

Задача 1. Секој природен број поголем од 1 е разлика на два триаголни броја. Докажи!

Решение. За секој природен број $n>1$ важи:

$$t_n - t_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n-n^2+n}{2} = n\,. \ \blacklozenge$$

Задача 2. Докажи дека збирот на два последователни триаголни броја е квадрат на некој природен број и обратно, секој полн квадрат поголем од 1 може да се запише како збир на два триаголни броја.

Решение. За секој природен број $n>1$ важи:

$$t_n + t_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = n^2\,,$$

од каде што следува тврдењето на задачата. Дали може ова тврдење и "нагледно" да се утврди со "механичко спојување" на два соседни триаголници од црт. 1? ♦

Задача 3. Докажи дека разликата на квадратите на два последователни триаголни броеви е куб на природен број.

Решение. Користејќи ги резултатите од претходните две задачи имаме

$$t_n^2 - t_{n-1}^2 = (t_n - t_{n-1})(t_n + t_{n-1}) = n \bullet n^2 = n^3\,. \ \blacklozenge$$

Задача 4. Докажи дека збирот на квадратите на два последователни триаголни броја е триаголен број.

Решение. За секој природен број n имаме

$$t_n^2+t_{n+1}^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\frac{(n+1)^2}{2}\bullet\frac{n^2+(n+2)^2}{2}=\frac{(n+1)^2}{2}\bullet\frac{n^2+n^2+4n+4}{2}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{2}\bullet(n^2+2n+2)=\frac{(n+1)^2}{2}[(n+1)^2+1]=\frac{(n+1)^2[(n+1)^2+1]}{2}=t_{(n+1)^2},$$

што и требаше да се докаже. ♦

Задача 5. Докажи дека двојниот производ на два последователни триаголни броја е триаголен број.

Решение. За секој природен број n важи:

$$2t_nt_{n-1}=2\frac{n(n+1)}{2}\bullet\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n^2+2n)(n+1)^2}{2}=\frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{2}=t_{n^2+2n}.\ ♦$$

Задача 6. Докажи дека во низата триаголни броеви има само еден прост број.

Решение. Секој триаголен број е полупроизвод на два последователни природни броја, т.е. $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$. Да ги разгледаме случаите кога n е парен, односно непарен број.

Ако $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$, тогаш $t_n=\frac{2k(2k+1)}{2}=k(k+1)$, а тоа е сложен број, освен за $k=1$, т.е. $n=2, t_2=3$.

Ако $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$t_n=\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}=\frac{2(2k+1)(k+1)}{2}=(k+1)(2k+1),$$

т.е. t_n е сложен број. ♦

Задача 7. Докажи дека природниот број m е триаголен ако и само ако $8m+1$ е полн квадрат на некој природен број.

Решение. Нека m е триаголен број, т.е. нека за некој $n\in\mathbb{N}$ важи $m=t_n=\frac{n(n+1)}{2}$. Тогаш

$$8m+1=\frac{8n(n+1)}{2}+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2,$$

т.е. $8m+1$ е квадрат на природен број.

Обратно, ако $8m+1$ е полн квадрат, тогаш тој е квадрат на непарен број, т.е. за некој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$8m+1=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=\frac{8n(n+1)}{2}+1$$

од каде наоѓаме $m=\frac{n(n+1)}{2}$. Според тоа, m е триаголен број. ♦

Задача 8. Докажи дека во низата триаголни броеви има бесконечно многу полни квадрати.

Решение. Забележуваме дека триаголните броеви 1 и 36 се полни квадрати. Тоа се првиот и осмиот член во низата триаголни броеви. Ќе докажеме дека, ако t_n е полн квадрат, тогаш $t_{4n(n+1)}$ е полн квадрат. Навистина, ако $t_n = \frac{n(n+1)}{2} = k^2$, тогаш $4n(n+1) = 8k^2$ и

$$\begin{aligned} t_{4n(n+1)} &= t_{8k^2} = \tfrac{8k^2(8k^2+1)}{2} = 4k^2(8k^2+1) = (2k)^2[4n(n+1)+1] \\ &= (2k)^2(2n+1)^2 = [2k(2n+1)]^2 \end{aligned}$$

т.е. $t_{4n(n+1)}$ е полн квадрат. ♦

Забелешка. Генерирањето на сите полни квадрати на низата триаголни броеви е можно со следнава рекурентна формула:

$$t_1 = 1, \quad t_x = y^2, \quad t_{3x+4y+1} = (2x+3y+1)^2 .$$

Еве ги првите неколку полни квадрати од оваа низа:

$$t_1 = 1^2, \quad t_8 = 6^2, \quad t_{49} = 35^2, \quad t_{288} = 204^2 . \; ♦$$

Задача 9. Со $[x]$ да го означиме најголемиот природен број кој е помал или еднаков на x. На пример, $[2,345] = 2,\ [0,124] = 0$. Ако m е триаголен број, т.е. $m = t_n$, тогаш $n = [\sqrt{2m}]$. Докажи!

Решение. Од $m = \frac{n(n+1)}{2}$ следува $2m = n^2 + n$, т.е.

$$n^2 < 2m < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 ,$$

па затоа

$$n < \sqrt{2m} < n+1 .$$

Оттука следува дека n е најголемиот цел број кој е помал од $\sqrt{2m}$, па затоа $n = [\sqrt{2m}]$. ♦

Задача 10. Нека бројот $x = 0,136051865...$ е формиран од цифрите на единиците на триаголните броеви. Дали x е рационален број?

Решение. Да запишеме неколку триаголни броеви: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 235, 276, 300, 325, 351, 378, ... Според тоа, првите 27 децимални цифри на бројот x се:

$$x = 0,136051865568815003100136051 8... .$$

Забележуваме дека постои период од 20 цифри, т.е. дека меѓу испишаните броеви t_n и t_{n+20}, за $n = 1,2,3,4,5,6,7$ имаат иста последна цифра. Ќе докажеме дека споменатото својство важи за секој природен број n. За таа цел доволно е да докажеме дека за секој природен број n разликата $t_{n+20} - t_n$ се дели со 10. Имаме

$$t_{n+20} - t_n \frac{(n+20)(n+20+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 10(2n+21) .$$

Конечно, бројот x има периодичен децимален запис, што значи дека тој е рационален број. ♦

Задача 11. Ако $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ е низата триаголни броеви, тогаш

$$A = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + ... + \frac{1}{t_n} + ... = 2.$$

Решение. За секој природен број k имаме $t_k = \frac{k(k+1)}{2}$, па затоа

$$\frac{1}{t_k} = \frac{2}{k(k+1)} = 2\frac{k+1-k}{k(k+1)} = 2[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}].$$

Според тоа,

$$A = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + ... + \frac{1}{t_n} + ... = 2[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}] + 2[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}] + 2[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}] + ... + 2[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] + ...$$

$$= 2[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + ...] = 2$$

што и требаше да се докаже. ♦

Задача 12. Докажи дека сите броеви кои во систем со основа 9 се запишуваат само со цифрата 1 се триаголни броеви.

Решение. Треба да докажеме дека броевите

$$1_{(9)},\quad 11_{(9)},\quad 111_{(9)},\quad 1111_{(9)},\quad 11111_{(9)},\quad 111111_{(9)} \qquad (1)$$

се триаголни броеви. Имаме

$$\underbrace{111...11}_{k \text{ edinici}}{}_{(9)} = 1 + 9 + 9^2 + ... + 9^{k-1} = \frac{9^k - 1}{9-1} = \frac{1}{2} \bullet \frac{3^k - 1}{2} \bullet \frac{3^k + 1}{2}.$$

Но, $3^k - 1$ и $3^k + 1$ се последователни парни броеви, т.е. $3^k - 1 = 2n$ и $3^k + 1 = 2n + 2$, за некој $n \in \mathbb{N}$, па затоа

$$\underbrace{111...11}_{k \text{ edinici}}{}_{(9)} = \frac{1}{2} \bullet \frac{3^k - 1}{2} \bullet \frac{3^k + 1}{2} = \frac{1}{2} \bullet \frac{2n(2n+2)}{4} = \frac{n(n+1)}{2}$$

што значи дека секој член од низата (1) е триаголен број. ♦

Задача 13. Докажи дека секој триаголен број, освен t_1 и t_3, може да се запише како збир на три, не задолжително различни триаголни броеви.

Упатство. Прво докажи ги следниве равенства:

а) $t_{3k+1} = t_k + t_{2k} + t_{2k+1}$, за секој $k \in \mathbb{N}$,

б) $t_{3k+2} = t_{k+1} + t_{2k+1} + t_{2k+1}$, за секој $k \in \mathbb{N}$,

в) $t_{3k} = t_{k-1} + t_{2k} + t_{2k}$, за секој $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Сега, за $n \geq 4$ тврдењето следува од равенствата а), б) и в), а за $n = 2$ имаме

$$t_2 = t_1 + t_1 + t_1. \;♦$$

На крајот од оваа статија ќе ја испитаме можноста за избор на бесконечна низа триаголни броеви, таква што сите нејзини делумни збирови се триаголни броеви.

Нека претпоставиме дека таква низа постои и дека сме конструирале дел од бараната низа:

$$t_{k_1}, t_{k_2}, t_{k_3}, t_{k_4}, ..., t_{k_n} \qquad (2)$$

при што

$$t_{k_1} + t_{k_2} + t_{k_3} + t_{k_4} + ... + t_{k_n} = t_{k_{n+1}}.$$

Ако на низата (2) го додадеме триаголниот број $t_{t_{k_{n+1}}-1}$ добиваме низа со истото својство. Навистина, бидејќи

$$t_n + (m+1) = t_{m+1}$$

при $m = t_{k_{n+1}}-1$ имаме

$$t_{k_1} + t_{k_2} + t_{k_3} + t_{k_4} + ... + t_{k_n} + t_{t_{k_{n+1}}-1} = t_{k_{n+1}} + t_{t_{k_{n+1}}-1} = +t_{t_{k_{n+1}}}.$$

На прв поглед изгледа дека оваа конструкција е тешка поради индексите. Но, не е така. Еве пример:

$$t_3 = 6, \quad t_5 = 15, \quad t_{20} = 210, ...$$

Кој е следниот член на оваа низа? Бидејќи $t_3 + t_5 + t_{20} = 231$ од претходно кажаното следува дека четвртиот член на низата е $t_{230} = 26565$, т.е. низата е

$$t_3, t_5, t_{20}, t_{230}, ...$$

Јасно, петтиот член на низата е t_{26564}. ♦

Забелешка. На крајот од оваа статија да забележиме дека може да се избере бесконечна низа триаголни броеви, таква што сите нејзини делумни збирови се полни квадрати. На пример, таква е низата:

$$t_1, t_{2\cdot 3^0}, t_{2\cdot 3^1}, t_{2\cdot 3^2}, ..., t_{2\cdot 3^k}, ...$$

за која

$$\begin{aligned}
t_1 + t_{2\cdot 3^0} + t_{2\cdot 3^1} + t_{2\cdot 3^2} + ... + t_{2\cdot 3^k} &= 1 + 3^0(2\cdot 3^0+1) + 3^1(2\cdot 3^1+1) + 3^2(2\cdot 3^2+1) + ... + 3^k(2\cdot 3^k+1) \\
&= 1 + (3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^k) + 2(3^0 + 3^2 + 3^4 + ... + 3^{2k}) \\
&= 1 + \frac{3^{k+1}-1}{2} + 2\cdot\frac{3^{2k+2}-1}{9^2-1} \\
&= 1 + \frac{3^{k+1}-1}{2} + \frac{3^{2k+2}-1}{4} \\
&= \frac{3^{2k+2}+2\cdot 3^{k+1}+1}{4} = (\frac{3^{k+1}+1}{2})^2.
\end{aligned}$$

Статијата првпат е објавенаво списанието СИГМА на СММ