

Bobillierova formula

ALIJA MUMINAGIĆ*

Sažetak. U članku je dokazan identitet poznat kao Bobillierova formula. Formula je također ilustrirana na elementarnim zadacima za učenike srednjih škola.

Ključne riječi: Bobillierova formula, trigonometrija

Bobillier formula

Abstract. Identity known as Bobillier formula is proved in the paper. The formula is also illustrated by elementary tasks adapted to be solved by high-school pupils.

Key words: Bobillier formula, trigonometry

U ovom članku dajemo jedan od mnogih dokaza teorema poznatog kao Bobillierova formula. Teorem glasi:

Teorem 1. Ako su R i r polumjeri trokutu ABC opisane i upisane kružnice te r_a , r_b i r_c polumjeri tom trokutu pripisanih kružnica, tada vrijedi

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r. \quad (1)$$

Dokazat ćemo najprije nekoliko identiteta koje zadovoljavaju kutovi trokuta, a koje ćemo koristiti u dokazu *Teorema 1*.

a) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R}$

b) $-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_a}{R} - 1$

c) $\cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_b}{R} - 1$

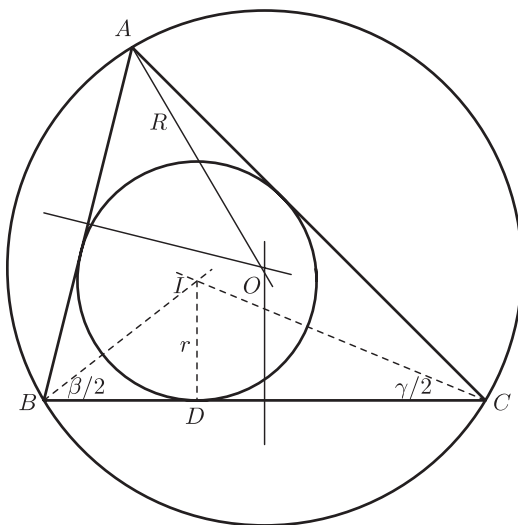
d) $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = \frac{r_c}{R} - 1$.

*Enghedsvej 58.1.th., 4800 Nykobing F, Denmark

Identitet a) dokazat ćemo na dva načina.

Prvi dokaz: Kako je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, to imamo redom

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right) + 1 \\
 &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + 1 \\
 &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + 1 \\
 &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1.
 \end{aligned} \tag{2}$$



Slika 1.

Neka je točka D nožište normale spuštene iz središta trokutu upisane kružnice I na stranicu \overline{BC} (vidi Sliku 1). Iz pravokutnih trokuta $\triangle BDI$ i $\triangle CDI$ je $|BD| = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ te $|CD| = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, pa zbog $a = |BC| = |BD| + |CD|$ imamo

$$\begin{aligned}
 a &= r \left(\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right) = r \cdot \frac{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} \\
 &= r \cdot \frac{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = r \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}},
 \end{aligned}$$

tj.

$$\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{a} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Iz (2) i (3) koristeći formulu $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ dobivamo

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 4 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{r}{a} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + 1 \\ &= 2 \cdot \frac{r}{a} \cdot \sin \alpha + 1 = \frac{2r}{a} \cdot \frac{a}{2R} + 1 \\ &= 1 + \frac{r}{R}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Drugi dokaz: Koristeći formule $R = \frac{abc}{4P}$ i $r = \frac{P}{s}$ gdje je s P označena površina trokuta, a s poluopseg trokuta dobivamo redom

$$\begin{aligned} 1 + \frac{r}{R} &= \frac{R+r}{R} = \frac{\frac{abc}{4P} + \frac{P}{s}}{\frac{abc}{4P}} = \frac{sabc + 4P^2}{sabc} \\ &= 1 + \frac{4P^2}{sabc} = 1 + \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc} \\ &= \frac{abc + 4 \cdot \frac{1}{2}(b+c-a) \cdot \frac{1}{2}(a+c-b) \cdot \frac{1}{2}(a+b-c)}{abc} \\ &= \frac{2abc + (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc}, \end{aligned}$$

odakle zbog

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = a(b^2+c^2-a^2) + b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) - 2abc$$

i kosinusovog poučka slijedi

$$\begin{aligned} 1 + \frac{r}{R} &= \frac{a(b^2+c^2-a^2) + b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2)}{2abc} \\ &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ &= \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma. \end{aligned}$$

Treba primijetiti da je prikazani dokaz “s desna na lijevo” jednostavniji.

Dokažimo sada b). Nakon množenja s $2abc$ zbog $R = \frac{abc}{4P}$ b) možemo zapisati u obliku

$$2abc(-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1) = 8 \cdot P \cdot r_a. \quad (4)$$

Označimo lijevu stranu jednakosti (4) s L . Iz kosinusovog poučka slijedi da je

$$\begin{aligned} 2bc \cos \alpha &= -a^2 + b^2 + c^2 \\ 2ac \cos \beta &= -b^2 + a^2 + c^2 \\ 2ab \cos \gamma &= -c^2 + a^2 + b^2 \end{aligned}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
 L &= -a(-a^2 + b^2 + c^2) + b(a^2 - b^2 + c^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) + 2abc \\
 &= a^3 + a^2(b + c) - a(b^2 + c^2 - 2bc) - b^3 + bc^2 + b^2c - c^3 \\
 &= a^3 + a^2(b + c) - a(b - c)^2 - (b^3 + c^3) + bc(b + c) \\
 &= a^3 + a^2(b + c) - a(b - c)^2 - (b + c)(b^2 - bc + c^2 - bc) \\
 &= a^3 + a^2(b + c) - a(b^2 + c^2 - 2bc) - (b + c)(b - c)^2 \\
 &= a^2(a + b + c) - a(b - c)^2 - (b + c)(b - c)^2 \\
 &= a^2(a + b + c) - (b - c)^2(a + b + c) = (a + b + c)[a^2 - (b - c)^2] \\
 &= (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = 2s(2s - 2b)(2s - 2c) \\
 &= 8s(s - b)(s - c) = \frac{8P^2}{s - a} = 8 \cdot P \cdot r_a
 \end{aligned}$$

gdje je za dobivanje posljednje jednakosti korištena Heronova formula za površinu trokuta $P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$.

Dokaz identiteta c) i d) ostavljamo čitateljima.

Dokaz teorema. Zbrajanjem jednakosti

$$\begin{aligned}
 -\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \frac{r_a}{R} - 1 \\
 \cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma &= \frac{r_b}{R} - 1 \\
 \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma &= \frac{r_c}{R} - 1
 \end{aligned}$$

dobivamo $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{1}{R}(r_a + r_b + r_c) - 3$ odakle, zbog a), slijedi $1 + \frac{r}{R} = \frac{1}{R}(r_a + r_b + r_c) - 3$ što nakon množenja s R daje $R + r = r_a + r_b + r_c - 3R$ tj. (1) što je i trebalo dokazati.

Zadatak 1. Dokazati da za kutove trokuta vrijedi

- 1) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$,
- 2) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$.

Rješenje. Pored dokazanog identiteta (1) koristit ćemo formule

$$r_a = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad r_b = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad r_c = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \quad (5)$$

te Eulerovu nejednakost $R \geq 2r$. Posljednja nejednakost posljedica je poznatog Eulerovog teorema $|OI|^2 = R^2 - r^2$, gdje je $|OI|$ udaljenost središta O opisane kružnice i središta I upisane kružnice trokutu ABC . (Formule (5) pokušajte sami dokazati.)

Uvedimo oznake $S_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ i $S_2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}$. Tada koristeći (5), (1) i Eulerovu nejednakost dobivamo

$$S_1 = \frac{r_a}{s} + \frac{r_b}{s} + \frac{r_c}{s} = \frac{r_a + r_b + r_c}{s} \stackrel{(1)}{=} \frac{4R + r}{s} \geq \frac{9r}{s}. \quad (6)$$

Znak jednakosti u (6) vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan, a kako za jednakostraničan trokut vrijedi $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{3}s = \frac{\sqrt{3}}{9}s$ to iz (6) slijedi $S_1 \geq \frac{9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}s}{s} = \sqrt{3}$.

Nakon kvadriranja $S_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ dobivamo

$$S_1^2 = S_2 + \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)$$

i zbog $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$ (pokušajte sami dokazati) vrijedi $S_1^2 = S_2 + 2$, tj. $S_2 = S_1^2 - 2 \geq (\sqrt{3})^2 - 2 = 1$.

Pokušajte ovaj zadatak riješiti i na neki drugi način. Postoji još nekoliko dokaza *Teorema 1*. Pokušajte ih pronaći.