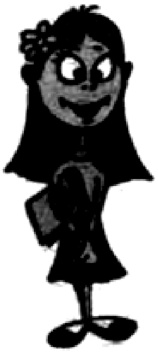

ШЕХЕРЕЗАДИН БРОЈ

Ратко Тошић, Нови Сад

Са математичке тачке гледишта, број 1001 има неколико интересантних својстава. Дељив је бројевима 7, 11 и „баксузним" бројем 13. Уствари, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, тј. број 1001 је производ три узастопна проста броја. То је чињеница добро позната ученицима који имају искуства са математичких такмичења.

Занимљиво је и то да се производ било ког троцифреног броја са 1001 може добити и тако што се тај број напише два пута. Заиста,

$$\overline{abc}\cdot 1001=\overline{abc}\cdot(1000+1)=1000\cdot\overline{abc}+\overline{abc}=\overline{abc000}+\overline{abc}=\overline{abcabc}.$$

На пример, $1001 \cdot 111 = 111111$. Како је $111 = 3 \cdot 37$, на основу тога се број 111111 лако раставља на просте чиниоце: $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

Приметимо да је слично: $\overline{ab}\cdot 101=\overline{abab}$, $\overline{abcd}\cdot 10001=\overline{abcdabcd}$ итд.

Пример. Доказати да је број 11111211111 дељив са 11^2.

Решење. Како је

$$11111211111=11111100000+111111=111111\cdot(100000+1)=111111\cdot 100001,$$

а с друге стране је

$$\begin{aligned}100001&=99990+11=10\cdot 9999+11=10\cdot 9\cdot 1111+11=90\cdot(101\cdot 11)+11\\&=(90\cdot 101)\cdot 11+11=9090\cdot 11+11=11\cdot(9090+1)=11\cdot 9091\end{aligned}$$

то је

$$11111211111=111111\cdot 11\cdot 9091=11\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37\cdot 11\cdot 9091=11^2\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37\cdot 9091.$$

У математици неки бројеви носе имена по познатим математичарима или физичарима, па тако имамо Архимедов број, Неперов, бројеве Фибоначија, Гауса итд. Број 1001, који није тако значајан, као горе наведени, у ђачком жаргону често се назива **Шехерезадин број**.

Шехерезада је популарна личност из најпознатијег зборника прича арапских народа „Хиљаду и једна ноћ", са елементима индијског и персијског фолклора. Знајући необичну слабост цара Шахријара да одсеца главе својим женама после прве брачне ноћи, Шехерезада је причала цару из ноћи у ноћ чудесне приче, заустављајући се у саму зору на најзанимљивијем месту. (Тај њен проналазак и данас обилато користе аутори телевизијских серија.) Цар, желећи да чује наставак, одлагао је њено погубљење до следећег јутра. Тако је Шехерезада причала цару бајке равно хиљаду и једну ноћ. После хиљаду и једне ноћи, задобила је цареву љубав и он јој је поклонио живот. Шехерезада је постала царева жена, а цео народ је славио њену лепоту и мудрост. Цар је наредио да се запишу све Шехерезадине приче и тако сачувају од заборава.

Треба напоменути да су приче настале у времену процвата арапске науке и културе (Багдадски калифат), па је то дошло до изражаја и у Шехерезадиним причама. Тако се у оквиру неких прича појављују и интересантни математички задаци. Наводимо један од њих (458. ноћ):

Јато голубова долетело је до високог дрвета. Један део се распоредио на гране дрвета, а други се сместио испод дрвета. Голубови са гране говоре онима испод: „Ако би један од вас долетео нама, било би вас трећина од укупног броја, а ако би један од нас слетео вама, било би нас подједнако." Колико је голубова седело на гранама, а колико их је било испод дрвета?

Наводимо два задатка у којима се користе горе описана својства броја 1001.

Задатак 1. Два играча наизменично уписују по једну цифру у поља траке 1×6 док се не добије 6-цифрени број. Није обавезно да се поља траке попуњавају редом. Није дозвољено користити цифре 0 и 9. Може ли Други играч (онај који не почиње игру првим потезом) постићи да добијени број буде дељив са 91?

Решење. Да. Стратегија Другог играча је следећа: он разбија (у мислима) траку на два скупа по 3 узастопна квадратића. Сваки пут кад Први играч упише неку цифру, Други на одговарајуће место у другој тројци квадратића уписује исту цифру.

a	b	c	a	b	c

Добијени број има облик

$$1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} = (1000 + 1) \cdot \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}.$$

Како је $1001 = 91 \cdot 11$, добијени број је дељив са 91.

Задатак 2. Два играча неизменично уписују по једну цифру у поља траке 1×12 док се не добије 12-цифрени број. Није обавезно да се поља траке попуњавају редом. Није дозвољено користити цифре 0 и 9. Може ли Други играч постићи да добијени број буде дељив са 407?

Решење. Да. Стратегија Другог играча је следећа: он разбија (у мислима) траку на два скупа по 6 узастопних квадратића. Сваки пут кад први играч упише цифру x, Други на одговарајуће место у другој шесторци квадратића уписује цифру $x' = 9 - x$.

		x		a'				x'		a	

Добијени број има облик $A \cdot 10^6 + B$, где је $A + B = 999999$, тј. добија се тако што је иза шестоцифреног броја A дописан шестоцифрени број B. Како је $999999 = 111111 \cdot 9$, $111111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и $37 \cdot 11 = 407$, то је број 999999 дељив са 407; према томе је и број

$$A \cdot 10^6 + B = A\left(10^6 - 1\right) + A + B = A\left(10^6 - 1\right) + 10^6 - 1 = \left(10^6 - 1\right)(A + 1).$$

На наведеним својствима заснивају се и неки „мађионичарски" трикови. Ево како је један такав „фокус", којим можете импресионирати своје другове, описао познати популаризатор математике Јаков Перељман.

Извођач трика тражи од једног од присутних да на листу папира напише произвољан троцифрен број.

– Могу ли у том броју бити и нуле?

– Нема никаквих ограничења. Било који троцифрен број.

– Написао сам. Шта сад?

– Допиши том броју исти тај број. Добићеш наравно шестоцифрен број.

– Тачно. Шестоцифрен број.

– Предај папир суседу, који седи подаље од мене. А он нека тај шестоцифрени број подели са 7.

– Лако је рећи: подели са 7! А шта ако није дељив са 7?

– Не брини се. Неће бити остатка.

– Не знаш бројеве, а сигуран си да неће бити остатка.

– Прво подели, а после ћемо разговарати.

– Имаш среће; број је дељив са 7.

– Резултат предај свом суседу не саопштавајући ништа. Он нека га подели са 11.

– Опет није било остатка. Шта сад?

– Предај резултат даље. Раздели га ... рецимо са 13.

– Баш сте имали среће. Опет нема остатка.

– Сад ми дај резултат са остатком. Само, пресавиј папир, да ја не бих видео бројеве.

Не развијајући лист папира, фокусник га предаје ученику који је написао полазни број:

– Изволите број који сте замислили.

– Савршено тачно! – са дивљењем је рекао овај.

Ако је први, на пример написао број 342, онда редом добијамо бројеве: 342342, $342342 : 7 = 48906$, $48906 : 11 = 4446$, $4446 : 13 = 342$.

По жељи, трик се може изменити тако да се шестоцифрени број подели са 7, затим са 11, а затим са замишљеним бројем тако да фокусник може самоуверено да објави да је коначни резултат број 13.

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛНИ РАД

1. Реши задатак о голубовима са стране 2.
2. Збир производа и збира два природна броја једнак је 1000. Који су то бројеви?
3. Нађи природне бројеве x, y, z такве да је $xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 1000$.
   Упутство: Једначина $xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 1000$ еквивалентна је са $(x+1)(y+1)(z+1) = 1001$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија