Osječki matematički list 16 (2016), 149-156

Routhov teorem i zlatne nedijane

Vladimir Volenec*

Sažetak

U radu je dan dokaz poznatog Routhovog teorema korištenjem baricentričkih koordinata. Tvrdnja Routhovog teorema odnosi se na omjer površine danog trokuta i površine trokuta dobivenog sjecištem triju njegovih nedijana.

Ključne riječi: *Routhov teorem, nedijane, baricentričke koordinate*

Routh's theorem and golden nedians

Abstract

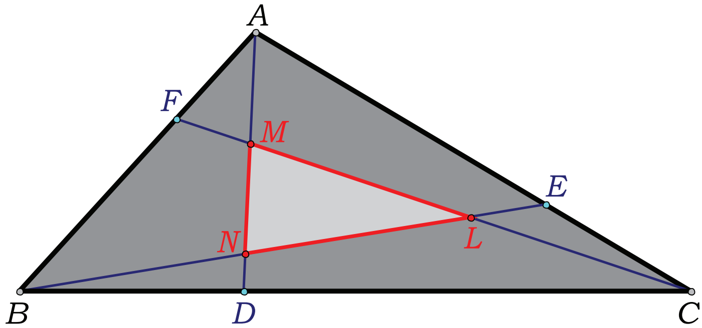
Using barycentric coordinates we give a proof of the well-known Routh's theorem related to the ratio between the areas of a given triangle and the triangle formed by the intersections of its three nedians.

Keywords: *Routh's theorem, nedians, barycentric ccoordinates*

Na slici 1 točke D, E, F su na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC (s površinom $\triangle$) odabrane tako da dijele te stranice u omjeru $1:2$, a pravci AD, BE, CF tvore trokut LMN, gdje je $L = BE \cap CF$, $M = CF \cap AD$, $N = AD \cap BE$. Kolika je površina tog trokuta?

Ovo je poznati zadatak, kojem su poznata mnoga različita rješenja. Ovdje ćemo dokazati teorem, pomoću kojeg ćemo moći riješiti mnogo općenitiji

*Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička cesta 30, HR-10 000 Zagreb, email: volenec@math.hr



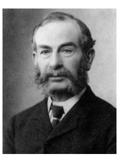
Slika 1:

zadatak kada su omjeri, u kojima točke D, E, F dijele stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, uzeti po volji.

Zbog jednostavnosti u ovom članku su oznake uvedene tako da isti simbol AB označava pravac kroz točke A i B, ali i orijentiranu duljinu dužine $\overline{AB}$, za razliku od njezine duljine $|AB|$. Iz konteksta je svugdje lako vidjeti da li se radi o oznaci za pravac ili za orijentiranu duljinu. Ako bismo pravac smatrali skupom točaka, tada bismo sa stajališta teorije skupova morali pisati $\{L\} = BE \cap CF$ kada je točka L zajednička točka pravaca BE i CF. Opet zbog jednostavnosti pišemo $L = BE \cap CF$.

Teorem 1. (Routh 1891, [2]) *Ako je* $BD : DC = d' : d$, $CE : EA = e' : e$, $AF : FB = f' : f$, $d + d' = 1$, $e + e' = 1$, $f + f' = 1$, *tada je*

$$\frac{1}{\triangle}p(LMN) = \frac{(def - d'e'f')^2}{(1 - ef')(1 - fd')(1 - de')}, \tag{1}$$



Edward John Routh
(1831. – 1927.)
engleski matematičar

gdje je $L = BE \cap CF$, $M = CF \cap AD$, $N = AD \cap BE$ *i gdje je* $p(LMN)$ *orijentirana površina trokuta* LMN.

U ovom teoremu se pojavljuju omjeri orijentiranih duljina, pa npr. formula $BD : DC = d' : d$ znači zapravo da je $d \cdot \overrightarrow{BD} = d' \cdot \overrightarrow{DC}$. Isto su tako i površine orijentirane, pa je površina $p(LMN)$ pozitivna ili negativna već prema tome da li trokuti LMN i ABC imaju iste ili suprotne orijentacije.

Dokaz. Poslužit ćemo se baricentričkim koordinatama (vidjeti npr. [4]). Jednakost $d \cdot \overrightarrow{BD} = d' \cdot \overrightarrow{DC}$ može se pisati u obliku $d(\mathbf{D} - \mathbf{B}) = d'(\mathbf{C} - \mathbf{D})$, odakle zbog $d + d' = 1$ slijedi $\mathbf{D} = d\mathbf{B} + d'\mathbf{C}$. Slično se mogu dokazati i jednakosti $\mathbf{E} = e\mathbf{C} + e'\mathbf{A}$ i $\mathbf{F} = f\mathbf{A} + f'\mathbf{B}$. Kako je $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$,

$C = (0,0,1)$, to odmah slijedi $D = (0,d,d')$, $E = (e',0,e)$, $F = (f,f',0)$. Dokažimo sada formule

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{e'f}{1-ef'}, \frac{e'f'}{1-ef'}, \frac{ef}{1-ef'}\right), \\ M &= \left(\frac{fd}{1-fd'}, \frac{f'd}{1-fd'}, \frac{f'd'}{1-fd'}\right), \\ N &= \left(\frac{d'e'}{1-de'}, \frac{de}{1-de'}, \frac{d'e}{1-de'}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Imamo

$$e'f + e'f' + ef = (e+e')(f+f') - ef' = 1 - ef',$$

pa je jednakost (2) za točku L korektna. Ta se jednakost može napisati u obliku $e'f'B + fE = (1-ef')L$ i u obliku $efC + e'F = (1-ef')L$, što dokazuje da točka L dana formulom (2) leži na pravcu BE i na pravcu CF, pa je $L = BE \cap CF$. Slično vrijede i jednakosti $M = CF \cap AD$, $N = AD \cap BE$. Primjenom formule za površinu trokuta iz članka [4] dobivamo redom

$$\begin{aligned} \frac{1}{\triangle} p(LMN) &= \frac{1}{(1-ef')(1-fd')(1-de')} \cdot \begin{vmatrix} e'f & e'f' & ef \\ fd & f'd & f'd' \\ d'e' & de & d'e \end{vmatrix} \\ &= \frac{d^2e^2f^2 + d'^2e'^2f'^2 - 2defd'e'f'}{(1-ef')(1-fd')(1-de')} \\ &= \frac{(def - d'e'f')^2}{(1-ef')(1-fd')(1-de')}. \end{aligned}$$

□

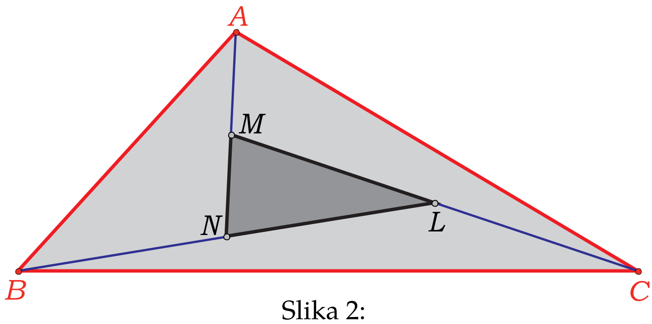
Naš početni zadatak je dan posebnim slučajem $d' : d = e' : e = f' : f = 1 : 2$ Routhovog teorema i uz $d' = e' = f' = \frac{1}{3}$, $d = e = f = \frac{2}{3}$ iz (1) dobivamo lako $\frac{1}{\triangle} p(LMN) = \frac{1}{7}$, a iz (2) slijedi

$$L = \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right), \quad M = \left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right), \quad N = \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right).$$

Očita je sada jednakost $\mathbf{A} + \mathbf{N} = 2\mathbf{M}$, pa je točka M polovište dužine $\overline{AN}$, a slično su i točke N i L polovišta dužina $\overline{BL}$ i $\overline{CM}$.

Na slici 2 krećemo od trokuta LMN, zatim mu produžavamo stranice $\overline{NM}$, $\overline{ML}$, $\overline{LN}$ za njihove duljine i dobivamo točke A, C, B sa istim odnosima kao na slici 1. Ako sada pretpostavimo da trokut LMN ima površinu 1, tada je sa slike 2 odmah jasno da svaki od tri trokuta BCL, CAM i ABN

ima površinu 2, pa cijeli trokut ABC ima tada površinu 7, tj. imamo očito $\frac{1}{\triangle}p(LMN) = \frac{1}{7}$.



Slika 2:

U promatranom posebnom slučaju imamo i jednakosti $D = \left(0, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $E = \left(\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{2}{3}\right)$, $F = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$. Zato je npr.

$$\frac{1}{\triangle}p(AFM) = \frac{1}{21} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{21}$$

i analogno $\frac{1}{\triangle}p(BDN) = \frac{1}{21}$, $\frac{1}{\triangle}p(CEL) = \frac{1}{21}$, pa zato zbog $\frac{1}{\triangle}p(LMN) = \frac{1}{7}$ slijedi

$$p(AFM) + p(BDN) + p(CEL) = p(LMN). \tag{3}$$

U [5] postavlja se pitanje kako treba odabrati točke D, E, F na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC da bi točke $L = BE \cap CF$, $M = CF \cap AD$, $N = AD \cap BE$ bile redom polovišta dužina $\overline{CF}$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$. Točke $A = (1, 0, 0)$, $D = (0, d, d')$ iz dokaza teorema 1 imaju polovište $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{d}{2}, \dfrac{d'}{2}\right)$, pa će to biti točka M iz formule (2) ako i samo ako je

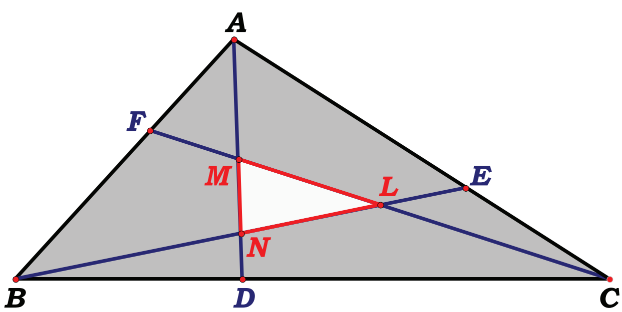
$$\frac{fd}{1 - fd'} = \frac{1}{2}, \quad \frac{f'd}{1 - fd'} = \frac{d}{2}, \quad \frac{f'd'}{1 - fd'} = \frac{d'}{2},$$

što je uz $d \neq 0$ i $d' \neq 0$ ekvivalentno sa $1 - fd' = 2fd$, $1 - fd' = 2f'$. Ove dvije jednadžbe su zbog $d + d' = 1$, $f + f' = 1$ ekvivalentne s jednadžbama $1 - f + fd = 2fd$, $1 - f + fd = 2 - 2f$, a to je zapravo samo jedna jednadžba $1 - f = fd$ s rješenjem $d = \dfrac{1 - f}{f}$. Dakle, dokazali smo prvu od tri analogne tvrdnje

$$M \text{ je polovište dužine } \overline{AD} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{1-f}{f},$$
$$N \text{ je polovište dužine } \overline{BE} \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{1-d}{d},$$
$$L \text{ je polovište dužine } \overline{CF} \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{1-e}{e},$$

a slično vrijede i preostale dvije tvrdnje. Uvrstimo li vrijednost za e iz jednakosti $e = \frac{1-d}{d}$ u jednakost $f = \frac{1-e}{e}$, dobivamo $f = \frac{2d-1}{1-d}$ i zato $1-f = \frac{2-3d}{1-d}$, $\frac{1-f}{f} = \frac{2-3d}{2d-1}$. Konačno zbog jednakosti $d = \frac{1-f}{f}$ dobivamo jednakost $d = \frac{2-3d}{2d-1}$. To znači da ako vrijede sve tri prethodne tvrdnje, tada broj d zadovoljava jednadžbu $2d^2 - d = 2 - 3d$, tj. $d^2 + d - 1 = 0$, s rješenjima $d = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Nama treba pozitivno rješenje $d = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \sim 0,615$, koje znači da točka D dijeli dužinu $\overline{CB}$ u omjeru zlatnog reza. Zbog simetrije imamo isti zaključak $e = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ i $f = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ za omjere u kojima točke E i F dijele stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BA}$. Još smo dužni dokazati da iz jednakosti $d = e = f = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ slijede prethodne tri tvrdnje. Međutim, lako je vidjeti da npr. iz $d = f = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ slijedi $d = \frac{1-f}{f}$.

Dakle, odgovor na pitanje iz [5] je da točke D, E, F moraju dijeliti stranice $\overline{CB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ u omjeru zlatnog reza. To je prikazano na slici 3.



Slika 3:

V. Chiţescu je u [1] postavio pitanje mogu li se točke D, E, F na stranicama $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ trokuta ABC odabrati tako da je

$$p(AFM) = p(BDN) = p(CEL) = p(LMN). \tag{4}$$

Uz formule (2) dobivamo

$$\frac{1}{\triangle} p(AFM) = \frac{1}{1-fd'} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & f' & 0 \\ fd & f'd & f'd' \end{vmatrix} = \frac{f'^2 d'}{1-fd'}$$

i analogno imamo još dvije formule

$$\frac{1}{\triangle} p(BDN) = \frac{d'^2 e'}{1-de'}, \quad \frac{1}{\triangle} p(CEL) = \frac{e'^2 f'}{1-ef'}.$$

Zato je jednakost $p(AFM) = p(BDN)$ ekvivalentna s jednakošću $f'^2(1 - de') = d'e'(1 - fd')$, koja je zbog $d = 1 - d'$ i $f = 1 - f'$ dalje ekvivalentna sa $f'^2(1 - e' + d'e') = d'e'(1 - d' + f'd')$. To se može pisati u obliku prve od tri analogne jednakosti

$$\begin{aligned} f'^2 - d'e' &= e'f'^2 - d'^2e' + d'^2e'f' - d'e'f'^2, \\ d'^2 - e'f' &= f'd'^2 - e'^2f' + d'e'^2f' - d'^2e'f', \\ e'^2 - f'd' &= d'e'^2 - f'^2d' + d'e'f'^2 - d'e'^2f', \end{aligned}$$

a slično se dokazuju preostale dvije jednakosti. Zbrajanjem ovih triju jednakosti dobivamo

$$d'^2 + e'^2 + f'^2 - e'f' - f'd' - d'e' = d'(e'^2 - f'^2) + e'(f'^2 - d'^2) + f'(d'^2 - e'^2). \tag{5}$$

Lijeva strana od (5) je

$$\frac{1}{2}[(e' - f')^2 + (f' - d')^2 + (d' - e')^2] \geq 0 \tag{6}$$

s jednakošću ako i samo ako je $d' = e' = f'$. Desna strana od (5) je $(e' - f')(f' - d')(d' - e')$. Ako se pretpostavi da je

$$ili \quad d' \geq e' \geq f' \quad ili \quad e' \geq f' \geq d' \quad ili \quad f' \geq d' \geq e', \tag{7}$$

što je Chiţescu učinio, tada je desna strana $(e' - f')(f' - d')(d' - e')$ od (5) nepozitivna. Zato tada (5) vrijedi ako i samo ako je $d' = e' = f'$, tj. $d = e = f$. Međutim, moglo bi umjesto (7) biti

$$ili \quad d' \leq e' \leq f' \quad ili \quad e' \leq f' \leq d' \quad ili \quad f' \leq d' \leq e', \tag{8}$$

što je Chiţescu previdio. Ako je npr. $d' \leq e' \leq f'$, tada uz $e' = d' + u$, $f' = d' + u + v$ imamo $u \geq 0$, $v \geq 0$. Lijeva strana od (5), tj. od (6), je tada jednaka

$$\frac{1}{2}\left(v^2 + (u+v)^2 + u^2\right) = u^2 + uv + v^2,$$

dok je desna strana $(e' - f')(f' - d')(d' - e')$ od (5) jednaka $uv(u+v)$, pa imamo uvjet

$$u^2 + uv + v^2 = uv(u+v) \tag{9}$$

ili

$$(u-1)v^2 + u(u-1)v - u^2 = 0.$$

Mora biti

$$u^2(u-1)^2 + 4u^2(u-1) \geq 0, \text{ tj. } u^2(u-1)(u+3) \geq 0$$

ili

$$(u-1)(u+3) \geq 0,$$

i zato je ili $u \leq -3$ ili $u \geq 1$. Ako je sada npr. d' između 0 i 1, tada zbog $e' = d' + u$ slijedi da e' nije između 0 i 1. To znači da tada ne mogu sve tri točke D, E, F biti na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Dokazali smo sljedeću tvrdnju.

Teorem 2. *Uz oznake iz teorema 1 i s točkama D, E, F na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuti AFM, BDN, CEL imaju jednake orijentirane površine ako i samo ako je $d' = e' = f'$ i $d = e = f$.*

Chiţescu u [1] ima mnogo kompliciraniji dokaz uz previd da postoji i mogućnost (8).

Ako se ne zahtijeva da su točke D, E, F na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, tada ne mora biti $d = e = f$. Npr. u (9) možemo uzeti da je $u = v = \frac{3}{2}$.

Dovršimo sada rješavanje problema, kojeg je postavio Chiţescu. Uzmemo li zbog teorema 2 da je $d = e = f = x$, pa zato i $d' = e' = f' = 1 - x$, tada imamo dalje

$$\frac{1}{\triangle} p(AFM) = \frac{f'^2 d'}{1 - fd'} = \frac{(1-x)^3}{1 - x + x^2},$$

a isto tako je i

$$\frac{1}{\triangle} p(BDN) = \frac{1}{\triangle} p(CEL) = \frac{(1-x)^3}{1 - x + x^2}.$$

S druge strane, po rezultatu iz dokaza teorema 1 dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\triangle}p(LMN) &= \frac{(def-d'e'f')^2}{(1-ef')(1-fd')(1-de')} = \frac{[x^3-(1-x)^3]^2}{(1-x+x^2)^3}\\ &= \frac{[x-(1-x)]^2[x^2+x(1-x)+(1-x)^2]^2}{(1-x+x^2)^3}\\ &= \frac{(2x-1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^2-x+1)^3} = \frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1}.\end{aligned}$$

Zato su jednakosti (4) ispunjene ako i samo ako je $(1-x)^3 = (2x-1)^2$, a to je jednadžba $x-x^2-x^3=0$, tj. jednadžba $x^2+x-1=0$. Njezino rješenje između 0 i 1 je $x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, pa opet imamo zlatni rez i sliku 3.

Ako je $BD : DC = CE : EA = AF : FB = 1 : 1$, tada su $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ težišnice (ili medijane) trokuta ABC. Zato je J. Satterly u [3] pravce AD, BE, CF (i dužine $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$) nazvao nedijanama u slučaju kada je $BD : DC = CE : EA = AF : FB = n : 1$, pri čemu se često uzima da je n neki prirodan broj. Nedijane na slici 3 možemo, dakle, smatrati zlatnim nedijanama.

Literatura

[1] I. Chiţescu, *O problemă de geometrie elementară în care apare numărul de aur*, Gaz. Mat. **100**(1995), 448–453.

[2] E. J. Routh, *A treatise on analytical statics with numerous examples*, Cambridge Univ. Press, 2.ed., 1896.

[3] J. Satterly, *The nedians of a plane triangle*, Math. Teacher **44**(1951), 46–48.

[4] V. Volenec, *Baricentričke koordinate 1 - Afina svojstva*, Osječki Mat. List **15**(1)(2015), 1–11.

[5] 62nd annual William Lowell Putnam mathematical competition, *Problem A4*, Math. Mag. **75**(2002), 72–76; Amer. Math. Monthly **109**(2002), 829, 831–834.