Алија Муминагиќ, Данска

РАЗЛИЧНИ ДОКАЗИ НА ЕДНО АЛГЕБАРСКО НЕРАВЕНСТВО

Во оваа труд ќе дадеме три различни докази на едно алгебарско неравенство кое гласи:

$$(x+y+z)\sqrt{3xyz(x+y+z)} \le xyz+(y+z)(z+x)(x+y); \quad (x,y,z>0) \qquad (1)$$

Првите два докази се доста комплицирани и бараат одредени познавања од теорија на полиноми, геометрија и геометриски неравенсва. За среќа третиот доказ ќе биде наједноставен а за него ќе користиме само еден алгебарски идентитет. Поради сето ова и насловот на статијата е ваков. Зошто да е едноставно кога може и да е комплицирано? Во продолжение следуваат тие докази.

Доказ 1. Во овој доказ неравенството (1) ќе го преставиме во геометриско неравенство користејќи ја следната лема:

Лема.*Реалните броеви a, b и c се должини на страни на еден триаголник ако и само ако постојат реални позитивни броеви x, y и z такви што $a=y+z,\ b=y+z$ и $c=x+y$.*

(Доказот на оваа лема може да се најде во [1], стр. 258).

Сега имаме

$$s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z\,, \qquad (2)$$

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{(x+y+z)xyz} \qquad (3)$$

$$r=\frac{P}{s}\sqrt{\frac{xyz}{x?+y+z}} \qquad (4)$$

$$R=\frac{abc}{4P}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}}\,. \qquad (5)$$

Неравенството (1) ќе го запишеме во облик

$$x+y+z)\sqrt{3}\le\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}+\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{\sqrt{xyz(x+y+z)}}\,, \qquad (6)$$

или поради (2),(3),(4) и (5)

$$s\sqrt{3}\le r+4R\,. \qquad (7)$$

Сега доволно е да се докаже неравенството (7). Ќе го користиме познатото равенство:

$$4R+r=r_a+r_b+r_c\,, \qquad (8)$$

каде R и r се радиуси на опишаната и впишаната кружница, а r_a, r_b и r_c се однадвор вписаните кружници во триаголникот.

Сега од (8) имаме:

$$(4R+r)^2 = (r_a + r_b + r_c)^2 . \qquad (9)$$

Бидејќи

$$(r_a + r_b + r_c)^2 \geq 3(r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c),$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(r_a - r_b)^2 + (r_b - r_c)^2 + (r_c - r_a)^2 \right] \right),$$

од (9) добиваме

$$(4R+r)^2 \geq 3(r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c) .$$

Сега, заради

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \qquad r_b = \frac{P}{s-b}, \qquad r_c = \frac{P}{s-c},$$

имаме,

$$\begin{aligned}(4R+r)^2 &\geq 3\left[\frac{P^2}{(s-a)(s-b)} + \frac{P^2}{(s-a)(s-b)} + \frac{P^2}{(s-a)(s-b)} \right] = \\ &= 3P^2 \frac{s-c+s-b+s-a}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \\ &= \frac{3s(s-a)(s-b)(s-c)(3s-2s)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \\ &= 3s^2 ,\end{aligned}$$

т.е.

$$(4R+r)^2 \geq 3s^2 ,$$

а од овде

$$s\sqrt{3} \leq r + 4R ,$$

што требаше и да се докаже.

Значи неравенството (7) е точно па точно е и на него еквивалентното неравенство (6), односно даденото неравенство (1).

Во неравенството (7) е исполнето равенство ако и само ако $r_a = r_b = r_c$, т.е. $a = b = c$, односно во (6) вреди равенство ако и само ако е $x = y = z$, кога што е исполнето равенство и во (1).

Забелешка 1. Неравенството $s\sqrt{3} \leq r + 4R$ може да се докаже и со примена на неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 ,$$

што е последица на познатото неравенство на Финслер-Хадвигер како и познатите неравенства

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr)$$

и

$$ab+bc+ca=s^2+r^2+4Rr\,.$$

Или, пак да се докаже дека вреди тригонометриското неравенство

$$\sqrt{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\le 3+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$

па оттука со користење на познатите тригонометриски равенства:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{s}{R}\,,$$

и

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}$$

одма се добива неравенството (7).

Би било добро да секој читател (ученици) индивидуално ги докажат сите споменати равенства во оваа забелешка.

Доказ 2. Овде ќе искористиме некои факти од теоријата за симетрични полиноми. Полиномите $f_1(x,y,z)=x+y+z$, $f_2(x,y,z)=xy+yz+zx$, $f_3(x,y,z)=xyz$ се елементарни симетрични полиноми, па заради тоа што $f(z)=(y+z)(z+x)(x+y)$ е симетричен полином, можеме да го запишеме во облик на полином чии променливи се елементарни симетрични полиноми.

На тој начин имаме

$$f(z)=(y+z)(z+x)(x+y)=x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz=$$
$$=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)-(x^3+y^3+z^3)+2xyz$$

и ставајќи $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy+yz+zx$ и $\sigma_3=xyz$, добиваме:

$$f_2(x,y,z)=(\sigma_1^2-2\sigma_2)\sigma_1-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)+2\sigma_3\,,$$

т.е.

$$f_2(x,y,z)=\sigma_2\sigma_1-\sigma_3\,. \tag{10}$$

Неравенството (1), заради (10), сега го добива обликот:

$$\sigma_1\sqrt{3\sigma_3\sigma_1}\le\sigma_3+\sigma_1\sigma_2-\sigma_3 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3\sigma_3\sigma_1}\le\sigma_2 \;\Leftrightarrow$$
$$3\sigma_3\sigma_1\le\sigma_2^2 \quad\Leftrightarrow\quad 3xyz(x+y+z)\le(xy+yz+zx)^2 \quad\Leftrightarrow \tag{11}$$
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2 \;\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}\left[(xy-xz)^2+(xy-yz)^2+(xz-yz)^2\right]\ge 0\,.$$

Последното неравенство е точно.

Според тоа, неравенството (11) е точно, па според тоа точно е и еквивалентното на него неравенство (1). Се разбира во (11) ва`и равенство ако и само ако е исполнето $x=y=z$, а тогаш е исполнето равенство и во (1).

Забелешка 2. До неравенството (10) може да се дојде и на следниот начин:

$$f(x,y,z)=(\sigma_1-z)(\sigma_1-x)(\sigma_1-y)=...=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3\,.$$

Доказ 3. За овој доказ ќе го користиме следниот идентитет:

$$(y+z)(z+x)(x+y)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz\,. \qquad (12)$$

Заради низата од еквиваленции:

$$(x+y+z)\sqrt{3xyz(x+y+z)}\le xyz+(y+z)(z+x)(x+y)$$

$$\overset{12}{\Leftrightarrow}(x+y+z)\sqrt{3xyz(x+y+z)}\le xyz+(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\cdot 3xyz(x+y+z)\le[(x+y+z)(xy+yz+zx)]^2$$

$$\Leftrightarrow 3xyz(x+y+z)\le(xy+yz+zx)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(xy-xz)^2+(xy-yz)^2+(yz-xz)^2\right]\ge 0,$$

и бидејќи последното неравенство е точно, добиваме дека и почетното неравенство е точно.

Од овие докази сигурно се гледа и оправданоста на коментарот на почетокот на оваа статија. Секако доказот 3 е убав и елегантен; не е ни многу тежок доколку се знае идентитетот (12). На мислење сум дека оваа статија е поучна и корисна за младите математичари и наставниците кои работат со надарените ученици.

Литература:

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] V. Devidė, *Čudesna matematika – pogled iznutra i izvana*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2010.

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I,* Tehnička knjiga, Za greb, 1992.

[4] А. Малчески, *„Симетрични полиноми од три променливи’’*, списание СИГМА, год.вол.26, 2005/2006, бр. но.1/69, бр. но.2/70, бр. но.3/71.