LXI олимпијада

1. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ и точка P во неговата внатрешност. Притоа се исполнети следниве услови

$$\measuredangle PAD : \measuredangle PBA : \measuredangle DPA = 1:2:3 = \measuredangle CBP : \measuredangle BAP : \measuredangle BPC.$$

Докажи дека симетралите на внатрешните агли $\measuredangle ADP$ и $\measuredangle PBC$ и симетралата на отсечката AB се сечат во една точка.

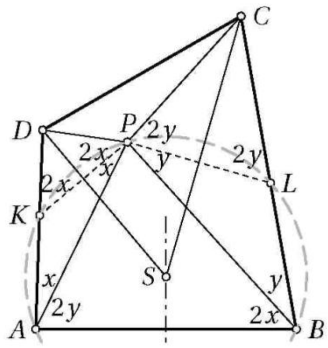
Решение. Да означиме $\measuredangle PAD = x$ и $\measuredangle CBP = y$. Ги разгледуваме точките K и L соодветно на полуправите DA и CB такви што $\overline{DK} = \overline{DP}$ и $\overline{CL} = \overline{CP}$. Од

$$\measuredangle ADP = 180^\circ - 4x$$

следува

$$\measuredangle DPK = \measuredangle PKD = 2x = \measuredangle PBA,$$

што значи дека точката лежи на кружницата ω опишана околу $\triangle APB$. Аналогно и точката L припаѓа на кружницата ω. Симетралите на аглите $\measuredangle ADP$ и $\measuredangle PBC$ воедно се симетрали и на отсечките PK и PL, па затоа тие се сечат во центарот S на кружницата ω, а јасно е дека $\overline{SA} = \overline{SB}$.



2. Дадени се реални броеви a, b, c, d за кои важи

$$a \ge b \ge c \ge d > 0 \text{ и } a + b + c + d = 1.$$

Докажи го неравенството

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Решение. Од тежинското неравенство меѓу срединиte следува

$$a^a b^b c^c d^d \le a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

па затоа доволно е да го докажеме неравенството

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1 = (a + b + c + d)^3.$$

Последното неравенство се докажува со степенување на десната страна и нејзино претставување на збир од ненегативни собирци од кои едниот е производот на левата страна. Имено:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3 &= (a+3b+3c+3d)(a^2+b^2+c^2+d^2)+\\ &\quad +2(a-b)b^2+2(a-c)c^2+2(a-d)d^2+6(abc+abd+acd+bcd)\\ &> (a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2).\end{aligned}$$

3. Дадени се $4n$ камчиња со маси $1, 2, \ldots, 4n$. Секое камче е обоено во една од n бои и во секоја боја се обоени точно четири камчиња. Докажи дека камчи-

њата можеме да ги поделиме во две купчиња така што се исполнети следниве услови:

1) Вкупните маси на камчињата во двете купчиња се еднакви.
2) Секое купче содржи по две камчиња од секоја боја.

Решение. Доволно е да направиме купче од n парови камчиња со вкупна маса $4n+1$ така што секоја боја ќе бида застапена точно два пати.

Разгледуваме граф $\mathbb{G}$ со n темиња кои им соодветствуваат на боите. За секој пар камчиња со збир на маси $4n+1$ цртаме едно ребро меѓу нивните бои. Графот $\mathbb{G}$ може да има петљи (лупи) и кратни ребра, но секое негово теме ќе има степен 4. Бараното купче соодветствува на подграф на овој граф во кој сите n темиња имаат степен 2, па затоа треба да конструираме еден таков подграф.

Бидејќи секое теме има парен степен, во секоја сврзана компонента на графот $\mathbb{G}$ можеме да најдеме Ојлеров циклус и неговите ребра наизменично да ги обоиме со црна и бела боја. Бидејќи во секое теме на графот $\mathbb{G}$ се среќаваат по две бели и две црни ребра, за подграфот определен со црните ребра степенот на сите темиња е 2, со што задачата е решена.

4. Даден е природен број $n>1$. На падините на една планина постојат n^2 станици кои по парови се на различни висини. Две компании A и B управуваат со жичари и секоја од нив има по k жичари, при што секоја жичара овозможува превоз од една станица до друга станица која е на поголема висина (без попатни застанувања). Сите k жичари на компанијата A имаат k различни почетни станици и k различни крајни станици, при што жичарата која има повисока почетна станица има и повисока крајна станица. Истото важи иза компанијата B. Велиме дека една компанија поврзува две станици ако е можно од пониската станица да се стигне во повисоката станица со користење на една или повеќе жичари на таа компанија (притоа други движења меѓу станиците не се дозволени).

Определи го најмалиот број k за кој сигурно постојат две станици кои ги поврзуваат двете компании.

Решение. *Одговор* n^2-n+1.

Следниот пример покажува дека за $k=n^2-n$ условот не мора да е исполнет:

- Жичарите на компанијата A возат од станицата i до станицата $i+1$ секогаш кога $n \nmid i+1$. Тогаш за сите парови (i,j) поврзани со A важи $[\frac{i}{n}]=[\frac{j}{n}]$.
- жичарите на компанијата B возат од станицата i до станицата $i+n$ секогаш кога $1 \le i \le n^2-n$. Тогаш за сите парови (i,j) поврзани со B задоволуваат $i \equiv j (\operatorname{mod} n)$.

Јасно, не постои пар кој ги задоволува и двата услови, што значи дека не постои пар кој е поврзан од двете компании.

Нека претпоставиме дека $k \geq n^2 - n + 1$. *Линии* ги нарекуваме максималните низи станици во кои секои две последователни станици ги поврзуваат жичари на иста компанија. Линијата може да биде и едночлена. Први станици на линиите на компанијата A се оние станици во кои не води ниту една жичара на таа компанија, а такви има $n^2 - k \leq n - 1$. Според тоа, компанијата A, а слично и компанијата B, има најмногу $n-1$ линија. Барем една линија на компанијата B има повеќе од $\frac{n^2-1}{n-1} = n+1$ станица, па затоа некои две од нив мора да припаѓаат на иста линија на компанијата A. Сега е јасно дека двете компании ги поврзуваат точно тие две станици.

5. Даден е шпил од $n > 1$ карти. На секоја карта е запишан еден природен број. Шпилот е таков што аритметичката средина на броевите запишани на произволни две карти од шпилот е еднаква на геометриската средина на броевите запишани на некое множество кое се состои од една или повеќе карти од шпилот.

   Определи го бројот n за кој мора броевите запишани на сите карти на шпилот да се еднакви.

   Решение. *Одговор*: за секој n.

   Броевите да ги означиме со $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ и да претпоставиме дека не се сите еднакви. Со делењето на броевите со константа се добива шпил карти кој го има истото својство. Затоа без ограничување на општоста можеме да сметаме дека ниту еден прост број не е делител на сите броеви.

   Нека p е прост број таков што $p \mid a_n$. Постои индекс i таков што $p \nmid a_i$ и $p \mid a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_n$. Според условот на задачата, бројот $\frac{a_i + a_n}{2} > a_i$ е геометриска средина на неколку броеви од кои барем еден е поголем од a_i, па значи е делив со p. Но, тоа значи дека и бројот $\frac{a_i + a_n}{2}$ е делив со p, т.е. дека $p \mid a_i$, што е противречност.

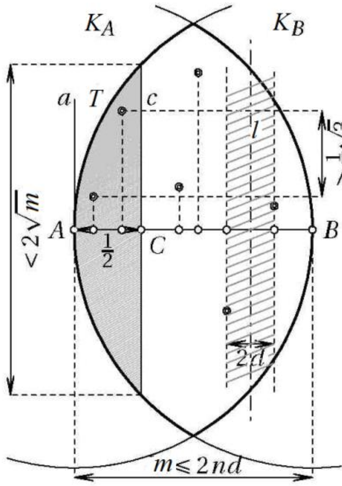
6. Докажи дека постои позитивна константа c таква што е исполнето следново тврдење:

   Нека $n > 1$ е природен број и $\mathbb{S}$ е множество од n точки во рамнината такви што растојанието меѓу секои две точки на множеството $\mathbb{S}$ е поголемо или еднакво на 1. Тогаш постои права l која го разделува $\mathbb{S}$ таква што растојанието од било која точка на множеството $\mathbb{S}$ до правата l е поголемо или еднакво на $cn^{-\frac{1}{3}}$.

(Правата l го разделува множеството $\mathbf{S}$ ако некоја отсечка чии крајни точки се во $\mathbf{S}$ ја сече правата l.)

Решение. Нека точките $A, B \in \mathbf{S}$ се такви што растојанието $m = \overline{AB}$ е максимално.

Јасно, множеството $\mathbf{S}$ се наоѓа во пресекот круговите $K_A(A,m)$ и $K_B(B,m)$.



Ортогоналните проекции на точките на множеството $\mathbf{S}$ ја делат отсечката AB на $n-1$ отсечки. Ако најдолгата од овие отсечки има должина $2d$, тогаш нејзината симетрала l го разделува множеството $\mathbf{S}$, а сите точки од $\mathbf{S}$ се на растојание од правата l кое е поголемо или еднакво на d. Исто така, важи

$$m \leq 2d(n-1) < 2nd.$$

Нека C е точка на отсечката AB таква што $\overline{AC} = \frac{1}{2}$, а a и c се нормали на правата AB соодветно во точките A и C. Бидејќи растојанието на проекциите на било кои две точки на множеството $\mathbf{S}$ е помало или еднакво на $2d$, најмалку $\frac{1}{4d}$ точки припаѓаат на отсечката AC. Значи, најмалку $k = [\frac{1}{4d}]$ точки од $\mathbf{S}$ лежат во делот T на клругот K_B меѓу правите a и c.

Обалста T е кружен отсечок над тетива со должина

$$2\sqrt{m^2 - (m-\tfrac{1}{2})^2} < 2\sqrt{m}.$$

Од друга страна, бидејќи секои две од k-те точки од $\mathbf{S} \cap T$ се на растојание поголемо или еднакво на 1, нивните проекции на правата c е на растојание поголемо или еднакво на $\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, $(k-1)\frac{\sqrt{3}}{2} < 2\sqrt{m}$, т.е. $k < 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{m} < 4\sqrt{m}$. Конечно,

$$\frac{1}{4d} < k < 4\sqrt{m} < 4\sqrt{2nd}, \text{ т.е. } d > \frac{1}{8}n^{-\frac{1}{3}},$$

што значи дека константата $c = \frac{1}{8}$ го задоволува условот на задачата.