JMMO 2012

1. Определи ги сите прости броеви од видот $\frac{\overbrace{11\ldots1}^{2n}}{11}$, каде n е природен број.

Решение. Го користиме равенството: $\overbrace{11\ldots1}^{k}=\frac{10^k-1}{9}$. Добиваме

$$\frac{\overbrace{11\ldots1}^{2n}}{11}=\frac{10^{2n}-1}{11\cdot9}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{11\cdot9}.$$

За $n=1$, $\frac{\overbrace{11\ldots1}^{2n}}{11}=\frac{11}{11}=1$ што не е прост број. За $n=2$,

$$\frac{\overbrace{11\ldots1}^{2n}}{11}=\frac{(10^2-1)(10^2+1)}{11\cdot9}=\frac{101\cdot99}{99}=101.$$

Ќе покажеме дека за $n>2$, бројот $\frac{\overbrace{11\ldots1}^{2n}}{11}$ е сложен. Разгледуваме два случаи: кога n е парен и кога n е непарен.

Случај 1. Нека n е парен. Тогаш 10^{2k} има остаток 1 при делење со 9 и 11. Бидејќи $\text{NZD}(9,11)=1$ добиваме дека 10^n-1 е делив со 99 и бројот

$$\frac{\overbrace{11\ldots1}^{2n}}{11}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{11\cdot9}=\frac{10^n-1}{99}(10^n+1)$$

е производ на два природни броеви поголеми од 1.

Случај 2. Нека n е непарен. Тогаш 10^{2k+1} има остаток -1 при делење со 11. Бројот $10^{2k+1}+1$ е делив со 11, а $10^{2k+1}-1$ е делив со 9. Бројот

$$\frac{\overbrace{11\ldots1}^{2n}}{11}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{11\cdot9}=\frac{10^{2k+1}-1}{9}\cdot\frac{10^{2k+1}+1}{11}$$

е производ на два природни броја поголеми од 1, па бројот е сложен.

2. Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со радиус 1. Докажи дека разликата меѓу неговиот периметар и збирот од должините на неговите дијагонали е позитивен, а е помал од 4.

Решение. Од неравенството на триаголник имаме:

$$2L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{CD}+\overline{DA}+\overline{DA}+\overline{AB}>\overline{AC}+\overline{BD}+\overline{AC}+\overline{BD},$$

од што го добиваме едното неравенство. Нека пресечната точка на дијагоналите ја означиме со R, а со d должината на дијаметарот на кружницата. Тогаш имаме

$$\begin{aligned}
L &= \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}\\
&< \overline{AR}+\overline{BR}+\overline{BR}+\overline{CR}+\overline{CR}+\overline{DR}+\overline{DR}+\overline{AR}\\
&= \overline{AC}+\overline{BD}+\overline{AC}+\overline{BD}\\
&\le \overline{AC}+\overline{BD}+2d\\
&= \overline{AC}+\overline{BD}+4
\end{aligned}$$

од што се добива другото неравенство.

3. Нека a,b и c се позитивни реални броеви за кои што е исполнето равенството

$$a+b+c+2=abc.$$

Докажи дека важи неравенството

$$\tfrac{a}{b+1}+\tfrac{b}{c+1}+\tfrac{c}{a+1}\ge 2.$$

Кога важи равенство?

Решение. *Прв начин*. Прво воочуваме дека важи равенството

$$\begin{aligned}
(a+1)(b+1)+(a+1)(c+1)+(b+1)(c+1)&=\\
&=a+b+c+(a+b+c+2)+ab+ac+bc+1\\
&=a+b+c+abc+ab+ac+bc+1\\
&=(a+1)(b+1)(c+1)
\end{aligned}$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме :

$$\begin{aligned}
\tfrac{a}{b+1}+\tfrac{b}{c+1}+\tfrac{c}{a+1} &= \tfrac{a+1}{b+1}+\tfrac{b+1}{c+1}+\tfrac{c+1}{a+1}-(\tfrac{1}{a+1}+\tfrac{1}{b+1}+\tfrac{1}{c+1})\\
&\ge 3\sqrt[3]{\tfrac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(b+1)(c+1)(a+1)}}-(\tfrac{1}{a+1}+\tfrac{1}{b+1}+\tfrac{1}{c+1})\\
&=3-\tfrac{(a+1)(b+1)+(a+1)(c+1)+(b+1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}\\
&=3-1=2.
\end{aligned}$$

Равенството важи ако и само ако $a=b=c=2$.

Втор начин. Ако неравенството го помножиме со $(a+1)(b+1)(c+1)>0$ го добиваме еквивалентното неравенство:

$$a(a+1)(c+1)+b(b+1)(a+1)+c(c+1)(b+1)\ge 2(a+1)(b+1)(c+1)$$

кое може да се запише во облик

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2\ge 2abc+ab+bc+ca+a+b+c+2.$$

Но, од неравенствата

$$a^2c+b^2a+c^2b \ge 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3abc$$
$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

добиваме

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2 \ge 3abc+ab+bc+ca\,.$$

Сега, ако го примениме условот од задачата, добиваме

$$a^2c+b^2a+c^2b+a^2+b^2+c^2 \ge 2abc+ab+bc+ca+a+b+c+2\,.$$

4. Определи ги сите прости броеви p и q кои ја задоволуваат равенката

$$(p+q)^p=(q-p)^{2q-1}.$$

Решение. Не може да важи $q-p=1$, бидејќи $(q+p)^p>1$, за секои прости броеви p и q.

Нека r е прост делител на $q-p$, тогаш r е делител и на $q+p$, па тој е делител на $2q=(q+p)+(q-p)$ и на $2p=(q+p)-(q-p)$. Следува дека $p=q=r$ или $r=2$. Случајот $p=q$ не е можен, бидејќи десната страна ќе биде нула, а левата е позитивен број. Според ова мора $q-p=2^k$ и $q+p=2^l$ за некои позитивни цели броеви k и l. Од

$$q=\tfrac{(q+p)+(q-p)}{2}=2^{l-1}+2^{k-1},$$

следува дека за $k>1$, $2\,|\,q$, што е можно само за $q=2$, но тогаш

$$(q-p)^{2q-1}<0<(p+q)^p,$$

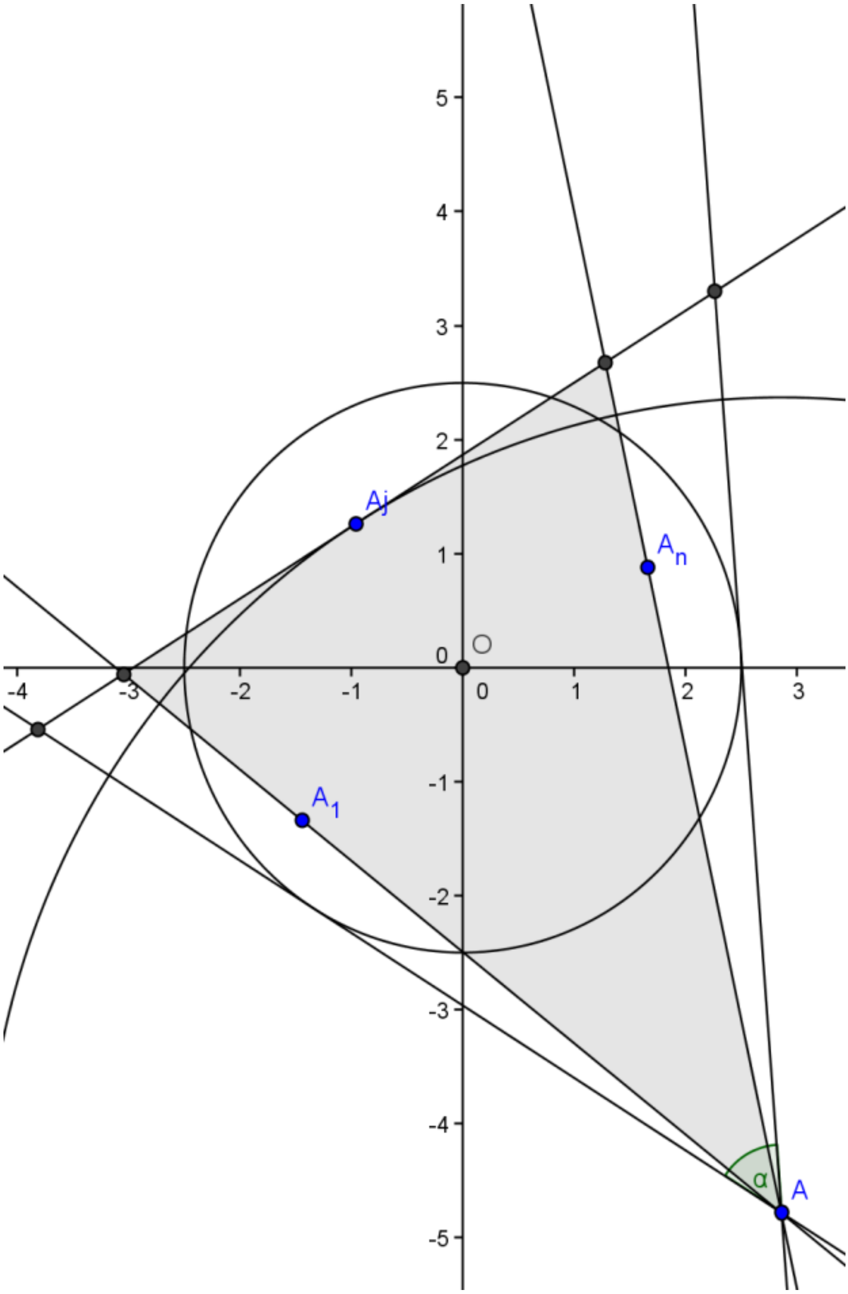
па мора да важи $k=1$. Ова значи дека $q-p=2$. Од друга страна добиваме

$$lp=2q-1=2p+3,$$

па мора да е $3\,|\,p$, т.е. $p=3$ и $q=5$. Со проверка добиваме дека овие броеви ја задоволуваат равенката.

5. Дадени се $n\ge 4$ точки во рамнина, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажи дека постои триаголник таков што сите точки се содржани во него, а на неговите страни лежи точно по една точка од дадените точки.

Решение. Дадените точки се конечно многу, па постои круг во чија внатрешност истите се наоѓаат. Имено, ја бараме максимално оддалечената точка од координатниот почеток. Ако тоа растојание го означиме со *R*, тогаш круг со центар во координатниот почеток и радиус *2R* ги содржи сите точки во внатрешноста.



Ги повлекуваме сите можни прави меѓу n-те точки во рамнината. Тие се конечно на број, т.е. ги има $\binom{n}{2}$, па можеме да избереме точка A која не лежи ниту на една од тие прави, таа е надвор од кругот кој ги содржи точките и најголемиот агол под кој се гледа секоја отсечка од кругот е остар. Повлекуваме низ A произволна права која не го сече кругот. Таа права ја ротираме додека не минува низ точка од дадените n точки, да ја означиме со A_1. На таа права се наоѓа една од страните на триаголникот. Продолжуваме со ротацијата додека не добиеме права на која лежи една од дадените точки и ја означуваме со A_n. На таа права се наоѓа друга страна од триаголникот. Било која од двете прави минуваат само низ A_1 и A_n соодветно бидејќи точката A не лежи на ниту една од дадените $\binom{n}{2}$ прави.

Нека најоддалечената од сите n точки до точката A ја означиме со A_j, а растојанието со d. Може да има повеќе точки кои се на максимално растојание од A , меѓутоа избираме една од нив произволна. Повлекуваме тангента на кружницата со центар во A и радиус d. На таа права лежи третата од страните на триаголникот.