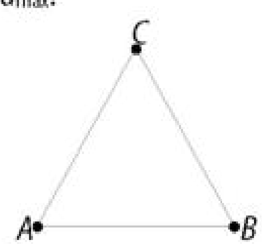
ЈЕДАН ЗАНИМЉИВ ОДНОС ДУЖИНА ДУЖИ

Владимир Мићић, Београд

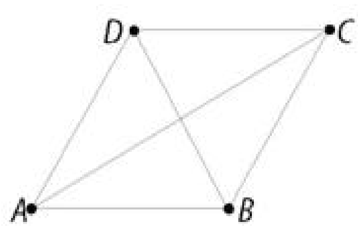
Сви геометријски објекти о којима пишемо налазе се у једној равни.

Ако су нам задате две различите тачке A и B, њима је задата тачно једна дуж AB, чији су крајеви те тачке. Ако су нам задате три различите тачке A, B, C, њима су задате три дужи AB, AC, BC, чији су крајеви парови датих тачака. Мерни бројеви дужина тих дужи, при изабраној јединици мере за дужину, су три позитивна реална броја d_1, d_2, d_3. Ако су та три броја једнака, те три тачке су темена једнакостраничног троугла ABC. Ако су два од тих бројева једнака а трећи различит од њих, оне могу бити темена једнакокраког троугла ABC који није једнакостраничан или припадати једној правој. Ако су то три различита реална броја, оне су темена разностраничног троугла или припадају једној правој. Међу тим бројевима постоји најмањи (можда су то два а можда и сва три) и постоји највећи (можда су то два а можда и сва три) па, не нарушавајући општост расуђивања, можемо писати $d_1 \leq d_2 \leq d_3$. У случају да су сва три броја једнака, највећи од њих једнак је најмањем. Ако су нам задате четири тачке A, B, C, D, њима је задато шест дужи AB, AC, AD, BC, BD, CD, чији су крајеви парови датих тачака. Мерни бројеви тих дужи су шест позитивних реалних бројева. Међу њима може бити једнаких, али се не може десити да сви буду међусобно једнаки (увери се у то). Постоји међу њима најмањи број (један или више) и највећи број (један или више).

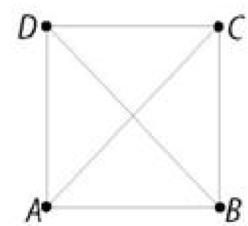
Јасно је да ће се повећавањем броја задатих тачака повећавати број њима одређених дужи и позитивних реалних бројева који представљају њихове мерне бројеве, али ће се сачувати поменуто својство да међу њима постоји најмањи (један или више), означавамо га са $d_{\min}$, и постоји највећи (један или више), означавамо га са $d_{\max}$.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

Однос двеју дужи једнак је односу њихових мерних бројева. Ако нам је дат скуп S_k од k тачака у равни, означавамо са q_k однос најдуже и најкраће дужи чији су крајеви парови тачака из S_k, $q_k = \dfrac{d_{\max}}{d_{\min}}$. То је позитиван број већи или једнак 1. За $k = 3$ може бити $q_3 = 1$; то се остварује ако су дате три тачке темена једнакостраничног троугла (слика 1). Ако су, за $k = 4$, дате четири тачке темена ромба с оштрим углом од 60°, онда је $q_4 = \sqrt{3}$ (слика 2). Ако су те четири тачке темена квадрата, онда је $q_4 = \sqrt{2}$ (Слика 3).

Бавићемо се сада скупом од шест тачака у равни.

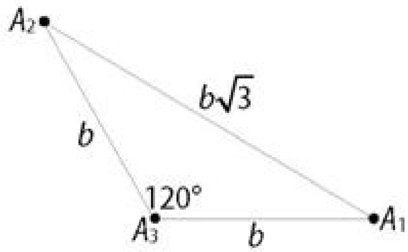
Теорема. Нека је у равни на произвољан начин изабрано шест тачака. Однос најдуже и најкраће од дужи чији су крајеви парови задатих тачака је већи или једнак $\sqrt{3}$.

Дакле, треба доказати да се шест тачака не може сместити у раван тако да буде $q_6 < \sqrt{3}$. Том циљу ћемо се приближавати једноставним корацима.

***Корак* 1**. Ако нађемо однос q за неки прави подскуп датог скупа тачака, придруживањем нових тачака тај се однос може само повећавати или остати непромењен.

Доказ. Придруживањем нових тачака се d_{max} не смањује а d_{min} не повећава, па се (на основу познатог својства реалних бројева) њихов количник не смањује.

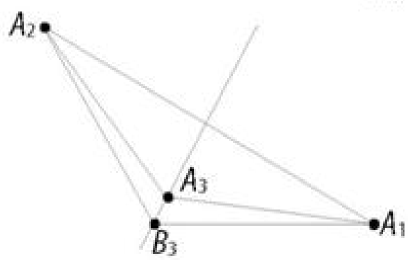
***Корак* 2**. Нека су тачке A_1, A_2, A_3 темена једнакокраког тупоуглог троугла с тупим углом од 120°. За скуп $S_3 = \{A_1, A_2, A_3\}$ је $q_3 = \sqrt{3}$.



Слика 4

Доказ. Ако је b дужина кракова тог троугла, онда је дужина његове основице једнака $b\sqrt{3}$ (удвостручена висина једнакостраничног троугла дужине страница b). Због тога је $d_{max} = b\sqrt{3}$, $d_{min} = b$ (има две дужи толике дужине), одакле налазимо $q_3 = \dfrac{d_{max}}{d_{min}} = \sqrt{3}$.

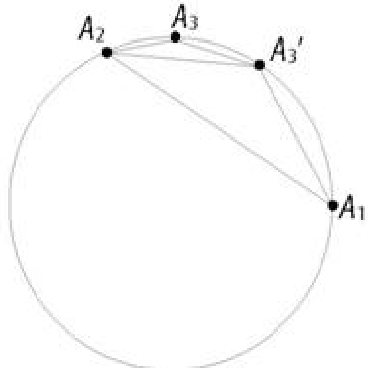
***Корак* 3**. Нека су тачке A_1, A_2, A_3 темена једнакокраког тупоуглог троугла с тупим углом већим од 120°. За скуп $T_3 = \{A_1, A_2, A_3\}$ је однос $\dfrac{d_{max}}{d_{min}}$ већи од $\sqrt{3}$.



Слика 5

Доказ. Нека је туп угао тог троугла код темена A_3 (слика 5). Уочимо на симетрали троугла (правој која садржи теме A_3 и нормална је на основицу A_1A_2) тачку B_3, с исте стране основице с које се налази и теме A_3, такву да је угао $A_1B_3A_2$ једнак 120°. У троуглу $A_3A_2B_3$ је угао код B_3 једнак 60° а угао код A_2 мањи од 30°, па је угао код A_3 туп. У шестом разреду смо научили да се у тупоуглом троуглу наспрам тупог угла налази највећа страница. Због тога је $A_3A_2 < B_3A_2$. У другом кораку смо доказали да је за скуп $\{A_1, A_2, B_3\}$ $q_3 = \sqrt{3}$. При прелазу са скупа $\{A_1, A_2, B_3\}$ на скуп $T_3 = \{A_1, A_2, A_3\}$ се $d_{\max}$ не мења, а $d_{\min}$ се смањује, па се $\frac{d_{\max}}{d_{\min}}$ повећава и већи је од $\sqrt{3}$, што је требало доказати.

Корак 4. Нека су тачке A_1, A_2, A_3 темена произвољног тупоуглог троугла са задатом страницом A_1A_2 и тупим углом код темена A_3 већим или једнаким 120°. Код свих таквих скупова $\{A_1, A_2, A_3\}$ однос $\frac{d_{\max}}{d_{\min}}$ је најмањи ако су то темена једнакокраког троугла. Тај је однос једнак $\sqrt{3}$ ако се нађемо у условима корака 2. У општем случају је $\frac{d_{\max}}{d_{\min}} \geq \sqrt{3}$.



Слика 6

Доказ. Знамо да су периферијски тупи углови (исто важи за оштре углове) над задатом тетивом једне кружнице једнаки. Нека је A_3' теме једнакокраког троугла с тупим углом α_3 и задатом страницом A_1A_2 (конструкција је једноставна). Теме A_3 припадају мањем кружном луку над тетивом A_1A_2 кружнице описане око троугла $A_1A_2A_3'$. Посматрајмо тачку A_3 која је ближа темену A_2 него темену A_1. Троугао $A_3'A_2A_3$ је тупоугли, с тупим углом код темена A_3. Због тога је $A_3A_2 < A_3'A_2$. У случају да је тачка A_3 ближа темену A_1 него темену A_2 улогу тачке A_2 преузима тачка A_1. При прелазу са скупа $\{A_1, A_2, A_3\}$ на скуп $\{A_1, A_2, A_3'\}$ се $d_{\max}$ не мења, а $d_{\min}$ повећава, па се $\frac{d_{\max}}{d_{\min}}$ смањује. Будући да то важи за сваку тачку A_3, наше тврђење је доказано. Завршни део следи из корака 2.

Корак 5. Ако тачке A_1, A_2, A_3 припадају једној правој, за скуп $\{A_1, A_2, A_3\}$ је $\frac{d_{\max}}{d_{\min}} \geq 2$.

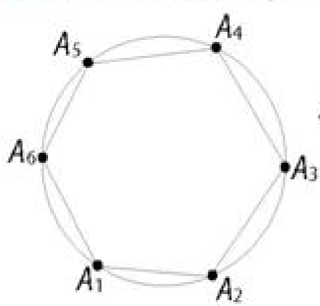
Доказ. Не нарушавајући општост расуђивања можемо претпоставити да A_2 припада дужи A_1A_3. Онда је $d_{\max} = |A_1A_3|$ док је $d_{\min} \leq \frac{1}{2}|A_1A_3|$, при чему се једнакост достиже у случају кад је A_2 средиште дужи A_1A_3. Из последње две релације следи да је $\frac{d_{\max}}{d_{\min}} \geq 2$.

Корак 6. Ако међу датих шест тачака постоје три које припадају једној правој, онда је $\frac{d_{\max}}{d_{\min}} > \sqrt{3}$.

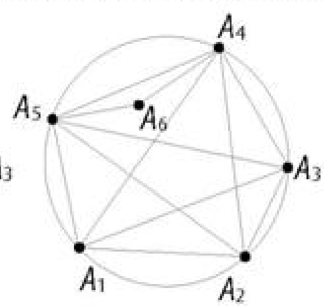
Доказ. Комбинујући корак 1 и корак 5 налазимо да је $\frac{d_{\max}}{d_{\min}} \geq 2 > \sqrt{3}$.

Корак 7. Ако међу изабраних шест тачака не постоје три које припадају једној правој, онда постоје само следеће четири могућности: 1° изабране тачке су темена конвексног шестоугла; 2° пет од изабраних шест тачака су темена конвексног петоугла а шеста се налази унутар њега; 3° четири од изабраних шест тачака су темена конвексног четвороугла а преостале две тачке се налазе унутар њега; 4° три од шест изабраних тачака су темена троугла а преостале три тачке се налазе унутар њега.

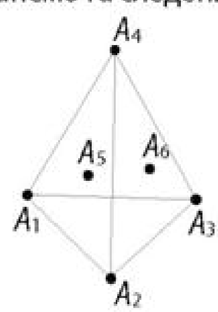
Доказ. Ово тврђење је скоро очигледно. Подржаћемо га следећим сликама:



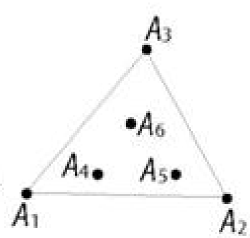
Слика 7 (1°)



Слика 8 (2°)



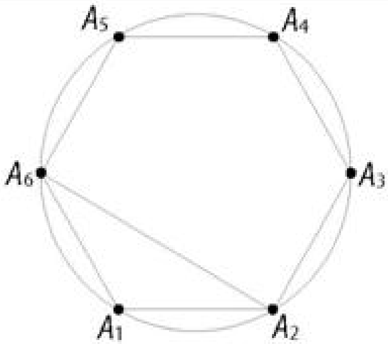
Слика 9 (3°)



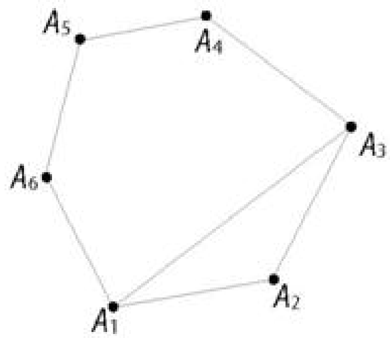
Слика 10 (4°)

Корак 8. Тврђење теореме важи у случају 1°.

Доказ. Нека су изабране тачке темена конвексног шестоугла. Збир углова шестоугла једнак је $(6-2)\cdot 180° = 720°$. Ако је тај шестоугао правилан, сви његови углови су по 120° (слика 11). Сваке две суседне странице тог шестоугла су краци једнакокраког тупоуглог троугла с тупим улом од 120°. У кораку 2 смо доказали да за три тачке које су темена таквог троугла важи да је $\frac{d_{\max}}{d_{\min}} = \sqrt{3}$. На основу корака 1 закључујемо да за свих шест тачака важи $\frac{d_{\max}}{d_{\min}} = \sqrt{3}$.



Слика 11

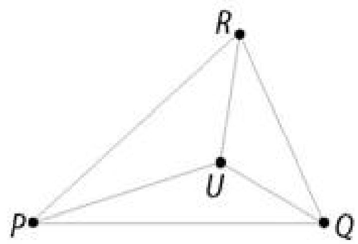


Слика 12

Ако тај шестоугао није правилан, међу његовим угловима постоји угао, један или више, који је мањи од 120° и постоји угао, један или више, који је већи од 120° (слика 12). Посматрајмо суседне странице шестоугла које заклапају угао већи од 120°. Оне су странице тупоуглог троугла чији је туп угао већи од 120° а њихове крајње тачке (оне припадају посматраном шесточланом скупу тачака) су темена таквог троугла. Комбинујући тврђења корака 3 и корака 4 закључујемо да за те три тачке важи $\frac{d_{\max}}{d_{\min}} > \sqrt{3}$, па на основу корака 1 следи да тврђење важи за свих шест тачака.

Корак 9. Тврђење теореме важи у случајевима 2°, 3° и 4°.

Доказ. У сваком од тих случајева постоје три од задатих шест тачака, такве да се унутар троугла чија су оне темена, налази једна (или више) од преосталих тачака посматраног шесточланог скупа. Означимо темена тог троугла са P, Q, R и нека је U та унутрашња тачка.



Слика 13

Те четири тачке су неке од посматраних шест тачака. Посматрајмо углове PUQ, QUR и RUP. Збир та три угла је 360°. Међу њима постоји угао који је већи или једнак 120°. На основу корака 4, за три тачке које су темена троугла чији је то туп угао важи $\frac{d_{\max}}{d_{\min}} \geq \sqrt{3}$. Корак 1 показује да овакав однос важи за свих шест тачака.

Задаци за самостални рад

1. Нацртај троугао за чији скуп темена важи да је $\frac{d_{\max}}{d_{\min}}$ једнако: а) $\sqrt{2}$; б) 3; в) 7.

2. Нацртај четвороугао за чији скуп темена важи да је $\frac{d_{max}}{d_{min}}$ једнако 5.
3. Израчунај $\frac{d_{max}}{d_{min}}$ за скуп темена правилног: а) шестоугла; б) осмоугла.
4. У равни су на произвољан начин изабране четири тачке. Провери да ли је однос најдуже и најкраће дужи чији су крајеви у тим тачкама већи или једнак $\sqrt{2}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија