XXXIII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Напиши ги сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

Решение. Трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4 се: 400, 310, 301, 130, 103, 220, 202, 211, 121 и 112.

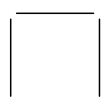
Задача 2. Во три камиони се натоварени 195 кутии, така што во секој камион има ист број кутии. Работниците растовариле еден камион. Уште колку кутии останале за растоварање?

Решение. Во секој камион има по 195:3=65 кутии. Работниците растовариле еден камион, односно 65 кутии, па им останале уште 195-65=130 кутии за растоварање.

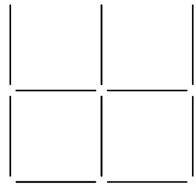
Задача 3. На една табла Зоран и Петар запишале два броја. Зоран запишал трицифрен број кој има цифра на единици 1, цифра на десетки која е 3 пати поголема од цифрата на единиците и цифра на стотки која е за 3 поголема од цифрата на единиците. Петар запишал број кој е претходник на најголемиот непарен број од првата десетка на втората стотка. Сања ги собрала запишаните броеви, а потоа збирот го намалила за нивната разлика. Кој број го добила Сања?

Решение. Зоран го запишал бројот 431. Петар го запишал бројот 108. А Сања пресметала вака: (431+108)-(431-108)=539-323=216.

Задача 4. Од четири чепкалки може да се направи едно квадратче, како на цртежот.Од 12 чепкалки може да се направи поголем квадрат 2×2, составен од 4 мали квадратчиња, како на сликата.Колку чепкалки се потребни за да се направи квадрат 10×10, составен од 100 мали квадратчиња?



Решение. Надворешната граница на квадратот ќе биде составена од $4\cdot10=40$ чепкалки. За секоја од внатрешната разделна линија е потребно по 10 чепкалки. Бројот на разделни линии е $2\cdot9=18$ (9 хоризонтални и 9 вертикални). Следува, потребни се $40+18\cdot10=220$ чепкалки.



Задача 5. Кога го прашале Павел колку години има секој член на неговото семејство, тој одговорил: „Јас и бато сме родени на ист ден во иста година и заедно имаме онолку години колку што има месеци во една година. Јас, бато и тато заедно имаме 40 години, мама има ист број на години како тато, а мама и баба заедно имаат 83 години. Баба, тато и дедо заедно имаат 139 години." Пресметај колку години има секој од членовите на семејството на Павел.

Решение. Павел и брат му се близнаци и заедно имаат 12 години, значи секој има по 6 години. Тие заедно со татко им имаат 40 години, значи таткото на Павел има 40-12=28 години, исто како и мајката на Павел. Таа заедно со бабата на Павел имаат 83 години, значи бабата има 83-28=55 години. Од последниот услов, за дедото на Павел добиваме дека има 139-(55+28)=56 години.

V одделение

Задача 1. На Милка и требаат 14 минути за да прочита една страна од книга. Вчера во 15:40 h почнала да чита расказ напишан на 10 страници од книгата. Во текот на читањето направила пауза за одмор која траела 15 минути. Во колку часот Милка завршила со читањето на расказот?

Решение. За да прочита 10 страници од книгата на Милка и биле потребни $10\cdot 14=140$ минути. Вкупното време за читање и одмор изнесува $140+15=155$ минути, 155 минути се 2 часа и 35 минути. Милка со читањето завршила во 18:15 h.

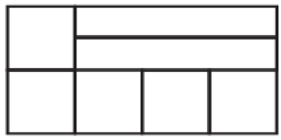
Задача 2. Во 4-б одделение имало 24 ученици. Секој ученик може да избира дали ќе ги изучува предметите информатика и германски јазик. 15 ученици учат информатика, 12 учат германски јазик, а 8 ученици не учат ниту информатика, ниту германски јазик. Колку ученици од 4-б одделение учат истовремено информатика и германски јазик?

Решение. Од 24 ученици во одделението, 8 не учат ниту информатика ниту германски јазик. Значи, $24-8=16$ ученици избрале барем еден од предметите. Бидејќи 15 учат информатика, а 12 германски јазик, што е вкупно $15+12=27$, добиваме дека $27-16=11$ ученици ги учат и двата предмети.

Задача 3. На две полици има вкупно 85 книги. Ако од првата на втората полица се преместат 7 книги, тогаш на втората полица ќе има четири пати повеќе книги отколку на првата полица. По колку книги имало на секоја од полиците пред преместувањето на книгите?

Решение. Да забележиме дека и пред и после поместувањето збирот на книгите на две полици е ист. По преместувањето, на втората полица ќе има четири пати повеќе книги отколку на првата полица, што значи дека на втората полица ќе има $85:5=17$ книги, а на првата $4\cdot 17=68$ книги. Пред преместувањето на 7-те книги, на првата полица имало 68+7=75, а на втората полица 17-7=10 книги.

Задача 4. Пресметај го периметарот на големиот правоаголник кој е составен од пет исти квадрати, секој со периметар 8cm, и два исти помали правоаголници, како на цртежот. Колку изнесуваат должините на страните на помалите правоаголници?



Решение. Бидејќи периметарот на секој квадрат е 8*cm*, имаме дека страната на квадратот е 2*cm*. Според сликата, за помалите правоаголници важи дека нивната должина е три пати поголема од страната на квадратот, односно 6*cm*, а ширината половина од страната на квадратот, односно 1*cm*. Должината на големиот правоаголник е 4 пати поголема од страните на квадратот, односно 8*cm*м, а ширината два пати, односно 4*cm*. Периметарот на големиот правоаголник е $L=2\cdot(8+4)=2\cdot 12=24cm$.

Задача 5. Дедо Миле има цветна градина. Во неа засадил 3 реда со црвени и жолти лалиња, 2 реда со бели и црвени каранфили и 1 ред со сини зумбули. Во секој ред засадил по 25 цветови. Но, цвеќињата ги засадил на следниот начин: на секои две црвени лалиња, веднаш до нив садел по три жолти лалиња, а по секој бел каранфил следуваат по 4 црвени каранфили. Ако црвените цвеќиња чинат по 5 денари, белите по 4, жолтите по 3, а сините по 1 денар, колку пари ќе заработи дедо Миле на пазар, продавајќи ги сите цвеќиња?

Решение. Најпрвин треба да се пресмета по колку цветови има во градината на дедо Миле. Во еден ред има 25 цветови. Во редовите со лалиња има 2 црвени, па 3 жолти, па потоа се повторува. Па вакви пет лалиња се повториле $25:5=5$ пати. Значи, во тој ред има 10 црвени и 15 жолти лалиња. Бидејќи такви се 3 реда заклучуваме дека во нив има вкупно 30 црвени и 45 жолти лалиња. Исто така, во редот со каранфили, на 1 бел, следуваат 4 црвени каранфили. Значи вакви пет каранфили се повториле $25:5=5$ пати. Па, во тој ред има 5 бели и 20 црвени каранфили. Бидејќи такви се 2 реда заклучуваме дека во нив има вкупно 10 бели и 40 црвени каранфили. Има еден ред со сини зумбули, па вкупно има 25 сини зумбули. Значи вкупно има 30 црвени лалиња и 40 црвени каранфили, односно 70 црвени, 10 бели, 45 жолти и 25 сини цвеќиња. Значи, дедо Миле на пазар ќе заработи вкупно

$$70\cdot 5+10\cdot 4+45\cdot 3+25\cdot 1=350+40+135+25=550 \text{ денари.}$$

VI одделение

Задача 1. Кутија со 30 еднакви топчиња има маса од 650 грама. Ако во кутијата додадеме уште 10 такви топчиња, вкупната маса ќе биде 800 грама. Колкава е масата на кутијата?

Решение. Со додавање на 10 топчиња во кутијата, вкупната маса се зголемува за $800-650=150$ грама. Според тоа, едно топче има маса од $150:10=15$ грама. Оттука сите топчиња во кутијата имаат маса $30\cdot 15=450$ грама. Значи, масата на кутијата е $650-450=200$ грама.

Задача 2. Симетралите на два соседни агли α и β се сечат под прав агол. Пресметај ги аглите α и β ако $\alpha-\beta=30^\circ$.

Решение. За соседните агли α и β, од условот за симетралите имаме дека $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^\circ$, односно $\alpha+\beta=180^\circ$, т.е. бараните агли се суплементни. Тогаш, од $\alpha-\beta=30^\circ$ имаме $\beta=\alpha-30^\circ$ и $\alpha+(\alpha-30^\circ)=180^\circ$, од каде добиваме дека $2\alpha=210^\circ$, односно $\alpha=105^\circ$. Тогаш $\beta=75^\circ$.

Задача 3. Мартин е 3 пати помлад од татко му, а заедно имаат 44 години. По колку години, Мартин ќе биде 2 пати помлад од татко му.

Решение. *Прв начин.* Нека годините на Мартин ги означиме со x, а годините на татко му со y. Од условот имаме $x+y=44$, $y=3x$, од каде следува $x+3x=44$, односно $4x=44$, т.е. $x=11$. Оттука $y=33$. Нека бројот на години после кои Мартин ќе биде 2 пати помал од татко му е z. Тогаш важи $2(11+z)=33+z$ односно $22+2z=33+z$, од каде $z=11$. Значи, во моментот Мартин има 11 години, а татко му 33 години и после 11 години, Мартин ќе биде 2 пати помал од татко му, односно тој ќе има 22 години а татко му 44.

Втор начин. Нека годините на Мартин ги означиме со x. Значи татко му ќе има $3x$ години. Заедно ќе имаат $4x$ години, односно $4x=44$, па $x=11$. Оттука Мартин има 11 години, а татко му има 33 години.

Нека бројот на години после кои Мартин ќе биде 2 пати помлад од татко му е z. Тогаш важи $22+2z=33+z$, од каде имаме $z=11$. Значи после 11 години, Мартин ќе биде 2 пати помлад од татко му, односно тој ќе има 22 години, а татко му 44.

Задача 4. Нивата на еден земјоделец има форма на правоаголник, со должина која е два пати поголема од ширината. Таа е заградена со три реда жица, за што биле употребени $360m$ жица. Нивата била посеана со пченица. Колку килограми пченица се добиени, ако од секои $100m^2$ се добиваат $35kg$ пченица?

Решение. Димензиите на нивата се ширина x и должина $2x$. Периметарот на нивата е

$$L=2(x+2x)=6x.$$

Ако нивата е заградена со три реда жица со должина $360m$, тогаш за еден ред жица потребни се $360:3=120m$жица, а исто толку изнесува и периметарот на нивата. Јасно, тогаш важи $6x=120m$, односно ширината на нивата е $x=20m$, а должината $40m$. Плоштината на нивата е

$$P=20\cdot 40m^2=800m^2.$$

Вкупното количество пченица кое е добиено е

$$8\cdot 35kg=280kg.$$

Задача 5. Производот на два броја е 1325. Ако помалиот од нив се зголеми за 5, а другиот остане ист, се добива нов производ 1590. Одреди ги тие броеви.

Решение. *Прв начин.* Едниот множител е $(1590-1325):5=53$, додека другиот множител е $1325:53=25$.

Втор начин. $1325=5\cdot 5\cdot 53$. Значи, помалиот множител мора да е 25, зашто не може да е 5 (за 5 не важи условот на задачата). Па, броевите се 25 и 53.

VII одделение

Задача 1. Откако од буре со бензин се истурени најпрвин $\frac{1}{4}$ од бензинот, а потоа уште 10% од вкупното количество во бурето останале 26 литри бензин. Колку литри бензин имало на почетокот во бурето?

Решение. Нека на почетокот имало x литри бензин. Тогаш

$$x-\frac{1}{4}x-\frac{10}{100}x=26.$$

Оттука $x=40$.

Задача 2. Одреди ги сите цифри a,b за кои бројот $\overline{a13b}$ е делив со 45.

Решение. Бројот $\overline{a13b}$ е делив со 45 ако е делив со 9 и 5. Значи, цифрата b може да биде 0 или 5. Ако $b=0$, тогаш $\overline{a130}$ е делив со 9 ако $a+1+3+0=a+4$ е делив со 9 и $a=5$, па бараниот број е 5130. Ако, пак, $b=5$, тогаш $\overline{a135}$ е делив со 9 ако $a+1+3+5=a+9$. Но $a\neq 0$, па останува $a=9$, т.е. бараниот број е 9135.

Задача 3. Множеството M се состои од сите прости делители на бројот 2310. Колку елементи има множеството што се состои од сите броеви кои се добиени како производ на точно два елементи од множеството M ?

Решение. Прости делители на бројот 2310 се $2, 3, 5, 7$ и 11 и нивниот производ е точно 2310. Значи, $M=\{2, 3, 5, 7, 11\}$, а множеството од попарни производи на елементите од M е множеството $A=\{6, 10, 14, 22, 15, 21, 33, 35, 55, 77\}$, и тоа има 10 елементи. Значи, бараниот број е 10.

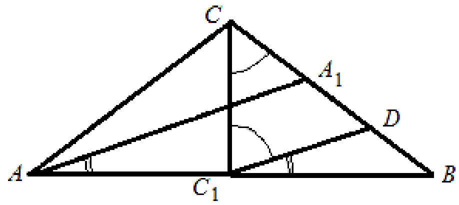
Задача 4. Правоаголник и квадрат имаат еднакви плоштини. Мерните броеви на нивните димензии се природни броеви од првата десетка. Ако ширината на правоаголникот е $2cm$, определи ги димензиите на правоаголникот и квадратот.

Решение. Нека P_1 е плоштината на квадрат со страна a. Нека P_2 е плоштината на правоаголникот со должина b. Тогаш од условите на задачата важи $P_1=a\cdot a=2\cdot b=P_2$, при што a,b се броеви од првата десетка и $a\neq 2$. Од $a\cdot a=2\cdot b$ добиваме дека бројот $2|a$, односно $a\in\{4,6,8\}$. За $a=4$, добиваме $b=8$ и тогаш квадратот има страна $4cm$, а правоаголникот страни $2cm, 8cm$. Добиеното решение е единствено.

Навистина, за $a=6$ се добива дека $b=18$, но тогаш 18 не е број од првата десетка. Истото важи и за $a=8cm$.

Задача 5. Определи ги аглите во рамнокракиот триаголник ABC, во кој висината спуштена кон основата е два пати помала од должината на симетралата на еден од аглите при основата.

Решение. Нека $\triangle ABC$ има краци $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{CC_1}$ е висината спуштена кон основата AB и $\overline{AA_1}$ е должината на симетралата на $\measuredangle BAC=\alpha$. Според условот



$$\overline{AA_1}=2\overline{CC_1} \text{ и } \measuredangle BAA_1=\frac{\alpha}{2}.$$

Нека D е средишна точка на BA_1. Тогаш $C_1D \parallel AA_1$ и $\overline{C_1D}=\frac{\overline{AA_1}}{2}=\overline{CC_1}$, па и $\measuredangle BC_1D=\measuredangle BAA_1=\frac{\alpha}{2}$. Значи, $\triangle CC_1D$ е рамнокрак и

$$\measuredangle DCC_1=\measuredangle C_1DC=90^\circ-\alpha,$$

па мора да важи

$$\measuredangle DC_1C=180^\circ-2(90^\circ-\alpha)=2\alpha.$$

Конечно,

$$\measuredangle DC_1C+\measuredangle BC_1D=2\alpha+\frac{\alpha}{2}=90^\circ$$

од каде се добива дека $\alpha=36^\circ$ и $\beta=180^\circ-2\alpha=108^\circ$.

VIII одделение

Задача 1. Определи го збирот a^2+b^2, ако $a+b=24$ и $a\cdot b=143$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= a^2+b^2+2ab-2ab \\ &= (a+b)^2-2ab \\ &= 24^2-2\cdot 143 = 290. \end{aligned}$$

Задача 2. Отсечка со должина $89,6cm$ подели ја на четири делови, така што $\frac{1}{2}$ од првиот дел е еднаква на $\frac{1}{3}$ од вториот, $\frac{1}{3}$ од вториот е еднаква на $\frac{1}{4}$ од третиот и $\frac{1}{4}$ од третиот е еднаква на $\frac{1}{5}$ од четвртиот дел. По колку сантиметри изнесува должината на секој од тие делови.

Решение. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се првиот, вториот, третиот и четвртиот дел, соодветно. Тогаш

$$\tfrac{1}{2}x_1 = \tfrac{1}{3}x_2 = \tfrac{1}{4}x_3 = \tfrac{1}{5}x_4 = k,$$

односно

$$x_1 = 2k, x_2 = 3k, x_3 = 4k, x_4 = 5k.$$

Според тоа,

$$2k + 3k + 4k + 5k = 89,6,$$

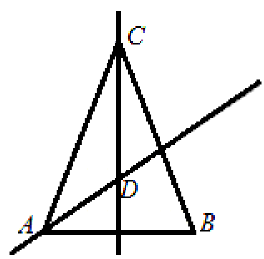
од каде $k = 6,4$. Па деловите се 12,8*cm*, 19,2*cm*, 25,6*cm* и 32*cm*.

Задача 3. На бројот 10 допиши му и од лево и од десно по една цифра така да добиениот четирицифрен број биде делив со 9 и со 4.

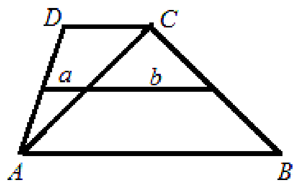
Решение. За новодобиениот број $\overline{a10b}$ да биде делив со 4 потребно е да завршува на 00, 04 или 08, односно $b \in \{0,4,8\}$. За бројот да е делив со 9 треба збирот на цифрите да е делив со 9, односно $a+b+1$ да е делив со 9. За $b=0$, збирот $a+b+1=a+1$ може да биде само 9. Тогаш, $a=8$ и бројот е 8100. За $b=4$, збирот $a+b+1=a+5$ може да биде само 9. Тогаш, $a=4$ и бројот е 4104. И на крај, за $b=8$, збирот $a+b+1=a+9$ може да биде единствено 18. Тогаш, $a=9$ и бројот е 9108.

Задача 4. Во рамнокракиот триаголник ABC повлечени се симетралите на аголот при врвот и на аголот при основата. Тие се сечат под агол од 130°. Определи ги аглите во триаголникот.

Решение. Нека α е аголот при основата и β е аголот при врвот. Тогаш од условот на задачата имаме $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+130^\circ=180^\circ$, па $\alpha+\beta=100^\circ$. Од друга страна за аглите во ΔABC важи $2\alpha+\beta=180^\circ$. Значи $\alpha=80^\circ$, па $\beta=20^\circ$.



Задача 5. Во трапезот $ABCD$ дијагоналата AC ја дели средната линија на отсечки со должини a и b. Определи го односнот на плоштините на триаголниците $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$.



Решение. Нека h е висината на трапезот. Исечоците a и b од средната линија на трапезот се средни линии за триаголниците $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$, соодветно. Според тоа, $\overline{AB}=2b$ и $\overline{DC}=2a$, односно

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{\overline{AB}\cdot h}{2}}{\frac{\overline{DC}\cdot h}{2}}=\frac{b}{a}.$$

IX одделение

Задача 1. Ако $x+y=0$ и $x^2+y^2=\frac{1}{4}$, пресметај го збирот x^4+y^4.

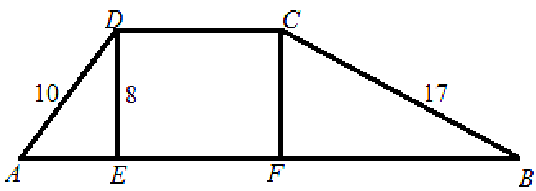
Решение. Ако $x+y=0$, тогаш $(x+y)^2=0$, т.е. $2xy=-(x^2+y^2)$, па затоа $2xy=-\frac{1}{4}$, односно $xy=-\frac{1}{8}$. Според тоа,

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(\tfrac{1}{4})^2-2(-\tfrac{1}{8})^2=\tfrac{1}{16}-\tfrac{2}{64}=\tfrac{1}{32}.$$

Задача 2. Плоштината на трапезот $ABCD$ е $164cm^2$. Неговата висина е $8cm$, а должините на краците BC и AD се $17cm$ и $10cm$, соодветно. Колку изнесува должината на основата CD?

Решение. Од формулата за плоштина на трапез добиваме

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\frac{2P}{h}=\frac{328}{8}=41cm.$$

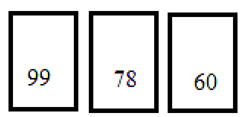


Нека DE и CF се висини во трапезот. Тогаш, од теоремата на Питагора добиваме дека $\overline{AE}=6cm$ и $\overline{FB}=15cm$, па тогаш

$$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EF}+\overline{FB}=\overline{AE}+\overline{CD}+\overline{FB}=21+\overline{CD}.$$

Оттука, $21+\overline{CD}+\overline{CD}=41$, односно $\overline{CD}=10cm$.

Задача 3. Марко напишал 6 различни броеви на 3 карти по еден на секоја страна на картите. Збировите на двата броја што се запишани на секоја од трите карти се еднакви. Марко ги поставил картите така што се гледаат само три броја, како на цртежот. Познато е дека скриените броеви се прости. Кои броеви ги сокрил Марко.



Решение. Нека S е збирот на броевите на секоја од картите поединечно. Ако S е парен број, тогаш скриените броеви на втората и третата карта мора да бидат парни броеви, што е спротивно на условот на задачата дека скриените броеви се различни прости броеви. Затоа, овој случај не е можен (има само еден парен прост број 2). Затоа, S е непарен број, т.е. на картата со број 99 скриениот број е парен и прост, т.е. 2. Тогаш $S=101$ и затоа скриениот број на втората карта е $101-78=23$, а на третата карта е $101-60=41$.

Задача 4. Даден е триаголник ABC така што $\angle BAC=60^\circ$. Нека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот и D е произволна точка на лакот BC (лакот на кој не лежи точката A). Докажи дека $\measuredangle BOC+\measuredangle OCD=120^\circ$.

Решение. Важи $\measuredangle BOC=2\cdot\measuredangle BAC=120^\circ$, бидејќи централниот агол е двапати поголем од периферниот агол над ист кружен лак. Сега, бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен следува дека

$$\measuredangle BDC=180^\circ-\measuredangle BAC=180^\circ-60^\circ=120^\circ.$$

Од четириаголникот $BDCO$ добиваме

$$\measuredangle BOC+\measuredangle OCD+\measuredangle CDB+\measuredangle DBO=360^\circ$$

односно

$$120^\circ+\measuredangle OCD+120^\circ+\measuredangle DBO=360^\circ,$$

од каде следува дека $\measuredangle OCD+\measuredangle DBO=120^\circ$.

Задача 5. Должините на катетите на правоаголниот триаголник ABC се a и b. Симетралата на правиот агол кај темето C ја сече хипотенузата во точката D. Пресметај ја должината на отсечката CD.

Решение. Нека M и N се подножјата на нормалите спуштени од точката D кон катетите AC и BC, соодветно. Триаголниците $\triangle CMD$ и $\triangle CND$ се рамнокраки и правоаголни, од каде следува дека четириаголникот $MDNC$ е квадрат. Нека со x ја означеме страната на овој квадрат. Бидејќи

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle CDB}+P_{\triangle ADC}$$

добиваме дека $\frac{ab}{2}=\frac{ax}{2}+\frac{bx}{2}$, односно $x=\frac{ab}{a+b}$.

Бидејќи $\overline{CD}$ е дијагонала на квадратот $MDNC$, добиваме дека $\overline{CD}=x\sqrt{2}=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.