XXI олимпијада

1. Нека $p, q \in \mathbb{N}$ и $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажи дека $1979 \mid p$.

Решение. Нека $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{1319}$ и $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{1318}$. Тогаш е исполнето

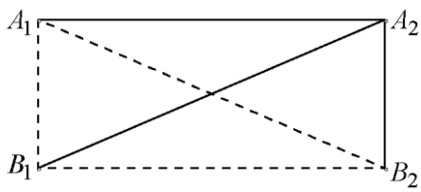
$$\begin{aligned}\frac{p}{q} = A - B = (A+B) - 2B &= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{1319} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{659} \\ &= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + ... + \frac{1}{1319} = (\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}) + ... + (\frac{1}{989} + \frac{1}{990}) \\ &= \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + ... + \frac{1979}{989 \cdot 990} = \frac{1979N}{660 \cdot 661 \cdot ... \cdot 1319}.\end{aligned}$$

Бидејќи 1979 е прост број, тој не може да се скрати со ниту еден од множителите од именителот. Затоа броителот на добиената дропка е делив со 1979.

2. Дадена е петстрана призма со основи $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Сите рабови на основите и сите отсечки A_iB_j $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ се обоени со црвена или зелена боја, така што во секој триаголник чии темиња се во темињата на основите на призмата, постојат две страни обоени со различна боја. Докажи дека сите десет рабови на основите на призмата се обоени со иста боја.

Решение. 1° Ќе докажеме дека, ако некој раб од некоја од основите е обоен со една боја, тогаш за секое теме кое е крајна точка на тој раб постојат барем три отсечки кои го поврзуваат со темињата на другата основа и кои се обоени со друга боја.

Претпоставуваме дека, на пример работ A_1A_2 е обоен со зелена боја, и спротивно на тврдењето, барем три од отсечките A_2B_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ се исто така обоени со зелена боја. Нека се тоа отсечките A_2B_j, A_2B_k, A_2B_m. Од три



темиња на петаголникот барем две се соседни. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $j = 1$, $k = 2$. Тогаш отсечките A_2A_1, A_2B_1 и A_2B_2 се обоени зелено (на цртежот се означени со полна линија). Според условот на задачата, отсечките A_1B_1, A_1B_2 и B_1B_2 се обоени црвено, т.е. $\triangle A_1B_1B_2$ е еднобоен, што противречи на претпоставката. Со тоа е покажано дека барем три отсечки A_2B_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ се обоени црвено.

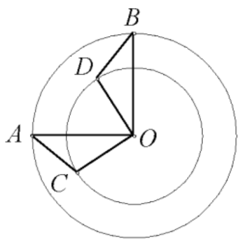
2° Ќе докажеме дека петаголниците при основите се еднобојни. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека во некој од нив постојат рабови со различна боја. Нека на пример, работ A_1A_2 е зелен, а работ A_2A_3 е црвен. Според 1°, најмалку три од отсечките A_2B_i, $i=1,2,3,4,5$ се црвени, а најмалку три се зелени, што не е можно.

3° Да претпоставиме дека сите страни на основата $A_1A_2A_3A_4A_5$ се зелени, а сите страни на основата $B_1B_2B_3B_4B_5$ се црвени. Ако 1° го примениме на страните на основата $A_1A_2A_3A_4A_5$, добиваме дека од дваесет и петте отсечки A_iB_j, $i,j=1,2,3,4,5$ има најмалку $5\cdot 3=15$ црвени. Аналогно, од петаголникот $B_1B_2B_3B_4B_5$ заклучуваме дека меѓу тие отсечки барем 15 се зелени. Бидејќи ова не е можно, сите десет рабови на основите на призмата се обоени со иста боја.

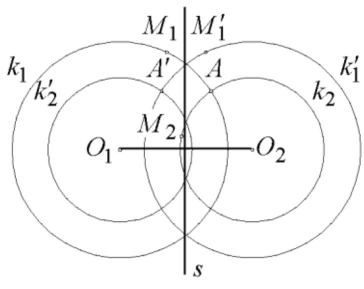
На крајот да забележиме дека призма со саканите својства постои. Дади пример!

3. Во рамнина се дадени кружници k_1 и k_2, за кои една пресечна точка е точката A. По кружниците k_1 и k_2, тргнувајќи од точката A истовремено почнуваат да се движат точки M_1 и M_2. Точките се движат во ист правец со еднакви аголни брзини и повторно се сретнуваат во точката A. Докажи дека во рамнината постои неподвижна точка P која во секој момент е еднакво оддалечена од точките M_1 и M_2.

Решение. *Прв начин*. Ќе го користиме следното тврдење, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба: *Ако AB и CD се лаци на кружници со заеднички центар O и ако $\measuredangle AOB=\measuredangle COD$, тогаш $\overline{AC}=\overline{BD}$.*



Нека O_1 и O_2 се центри на дадените кружници k_1 и k_2, s е симетрала на отсечката O_1O_2 и ϕ е симетрија во однос на правата s. Ги воведуваме ознаките $A'=\phi(A)$, $k_1'=\phi(k_1)$, $k_2'=\phi(k_2)$. Јасно, $A'\in k_1'\cap k_2'$. Кружниците k_1' и k_2 се концентрични, како и кружниците k_2' и k_1.



Ќе докажеме дека A' е точка која ги задоволува условите од задачата. Нека во некој момент првата точка се наоѓа во $M_1\in k_1$, а втората во $M_2\in k_2$.

Од условот на задачата следува $\measuredangle M_1O_1A=\measuredangle M_2O_2A$. Ако $M_1'=\phi(M_1)$, тогаш $\overline{AM_1'}=\overline{A'M_1}$. Исто така

$$\measuredangle A'O_2M_1'=\measuredangle M_1O_1A=\measuredangle M_2O_2A,$$

од каде што следува $\overline{A'M_2} = \overline{AM_1'}$. Значи, $\overline{A'M_1} = \overline{A'M_2}$, т.е. точката A' е еднакво оддалечена од точките M_1 и M_2.

4. Дадена е рамнина π, точка P во таа рамнина и точка Q надвор од неа. Определи ги сите точки R од π за кои количникот $\frac{\overline{PQ}+\overline{PR}}{\overline{QR}}$ е максимален.

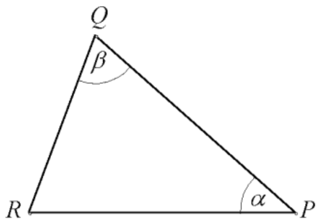
Решение. Нека R е точка во рамнината π, различна од P и $\measuredangle RPQ = \alpha$, $\measuredangle PQR = \beta$. Од триаголникот PQR добиваме

$$\frac{\overline{QR}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{PQ}}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\overline{PR}}{\sin\beta},$$

од каде што

$$\frac{\overline{PQ}+\overline{PR}}{\overline{QR}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

За даден агол α, овој количник е најголем ако $\sin(\beta+\frac{\alpha}{2}) = 1$, т.е. $\beta+\frac{\alpha}{2} = 90^\circ$. Последното равенство е исполнето ако и само ако $\triangle QRP$ е рамнокрак , т.е. $\overline{PR} = \overline{PQ}$.



Бидејќи $0 < \alpha < 180^\circ$, т.е. $0 < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, а функцијата $\sin$ е растечка на $(0, 90^\circ)$, дадениот однос има најголема вредност кога α е најмал.

Ако правата PQ е нормална на рамнината π, множеството точки кои ги задоволуваат условите на задачата е кружница со центар во P и радиус $\overline{PQ}$. Ако правата PQ не е нормална на π, тогаш постои само една точка која ги задоволува условите од задачата и тоа е точката која припаѓа на рамнината нормална на π, што ја содржи правата PQ, при што растојанието меѓу точките R и P е еднакво на $\overline{PQ}$, а $\measuredangle RPQ$ е остар. Со овие услови точката R е еднозначно определена.

5. Најди ги сите реални броеви a за кои постојат ненегативни броеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, кои ги задоволуваат релациите

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3.$$

Решение. Да претпоставиме дека бројот a ги задоволува условите на задачата. Тогаш

$$a^3=\sum_{k=1}^{5}k^5x_k\,,\qquad a^3=a\sum_{k=1}^{5}k^3x_k\,,\qquad a^3=a^2\sum_{k=1}^{5}kx_k\;.$$

Ако го помножиме второто од овие равенства со -2 и ако сите ги собереме равенствата, добиваме

$$0=\sum_{k=1}^{5}k\,x_k(k^4-2ak^2+a^2)=\sum_{k=1}^{5}k\,x_k(k^2-a)^2\;.$$

Сите собирци од последниот збир се ненегативни, па според тоа

$$k\,x_k(k^2-a)^2=0\text{, за }k=1,2,3,4,5\,.$$

Ако $a=0$ единствено решение е $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$. Ако некој $x_k\neq 0$ тогаш $a=k^2$. Таков a исто така ги задоволува условите на задачата за

$$x_k=k\,,\;x_j=0\;\;(j\neq k,1\leq j\leq k)\,.$$

Значи, бараните броеви се $0,1,4,9,16,25$.

6. Нека A и E се две спротивни темиња на правилен осумаголник. На темето A се наоѓа жаба. Од секое теме на осумаголникот, освен од темето E, жабата може да скокне на соседно теме. Кога ќе дојде на темето E жабата останува на него. Со a_n да го означиме бројот на начините на кои жабата може да дојде од темето A на темето E скокнувајќи точно n пати. Докажи дека

$$a_{2n-1}=0,\quad a_{2n}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}),\quad n=1,2,3,...$$

каде $x=2+\sqrt{2}$ и $y=2-\sqrt{2}$.

(Жабата може да дојде од темето A во темето E скокнувајќи точно n пати ако скока по низа од темиња $(P_0,P_1,P_2,...,P_n)$ така што се исполнети условите:

(i) $P_0=A,P_n=E$;

(ii) за секој $i,0\leq i\leq n-1$, $P_i\neq E$;

(iii) за секој $i,0\leq i\leq n-1$, P_i и P_{i+1} се соседни темиња на осумаголникот.)

Рдшение. Ги означуваме последователно темињата на осумаголникот со броевите $-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ така што темето A е означено со бројот 0, а темето E со бројот 4. Во секој скок жабата ја менува парноста на темето на кое се наоѓа. За пат од 0 до 4 и требаат парен број скокови. Значи $a_{2n-1}=0$ за $n=1,2,...$.

Нека u_{2n} е бројот на патиштата со должина $2n$ (т.е. бројот на патиштата кои се состојат од $2n$ скокови) од точката 0 до точката 0, кои не минуваат низ точката 4; v_{2n} е бројот на патишта со должина $2n$ од 0 до 2, кои не минуваат низ 4. Тогаш, и бројот на патишта со должина $2n$ од 0 до -2 кои не минуваат низ 4 е еднаков на v_{2n}.

Секој пат со должина $2n+2$ од точката 0 до точката 4 кој ги задоволува условите на задачата се состои од некој пат со должина $2n$ од 0 до 2 (или од 0 до -2), а такви патишта има $2\nu_{2n}$ и пат со должина 2 од 2 (односно -2) до 4, таков пат е само еден. Затоа

$$a_{2n+2} = 2\nu_{2n}, \text{ за } n = 1, 2, ... \tag{1}$$

Ќе докажеме дека

$$u_{2n+2} = u_{2n} + 2\nu_{2n} \text{ за } n = 1, 2, ... \tag{2}$$

Имено, секој пат со должина $2n+2$ од точката 0 до точката 0 кој не минува низ 4 се состои од:

- некој пат со должина $2n$ од точката 0 до точката 0 кој не минува низ 4 (такви патишта има u_{2n}) и пат со должина 2 од 0 до 0 (такви патишта се $(0,1,0)$ и $(0,-1,0)$) или
- некој пат со должина $2n$ од 0 до 2 (или до -2) кој не минува низ 4 (такви патишта има $2\nu_{2n}$) и пат со должина 2 од 2 (односно -2) до 0 (таков е само еден пат).

На сличен начин се докажува дека

$$\nu_{2n+2} = u_{2n} + 2\nu_{2n} \text{ за } n = 1, 2, ... \tag{3}$$

Од (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned}\nu_{2n+4} &= u_{2n+2} + 2\nu_{2n+2} = 2u_{2n} + 2\nu_{2n} + 2\nu_{2n+2} \\ &= 2(\nu_{2n+2} - 2\nu_{2n}) + 2\nu_{2n} + 2\nu_{2n+2} = 4\nu_{2n+2} - 2\nu_{2n}.\end{aligned}$$

Од последното равенство и од (1) добиваме

$$a_{2n+4} - 4a_{2n+2} + 2a_{2n} = 0 \text{ за } n = 1, 2, ... \tag{4}$$

Ако ставиме $y_n = a_{2n}$ ја добиваме диференцната равенка

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 2y_n = 0 \tag{5}$$

со почетни услови $y_1 = a_2 = 0$ (бидејќи нема патишта со должина 2 од 0 до 4) и $y_2 = a_4 = 2$ (бидејќи постојат два пата со должина 4 од 0 до 4: $(0,1,2,3,4)$ и $(0,-1,-2,-3,-4)$).

Карактеристичната равенка на диференцната равенка (5) е $\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$, и нејзини решенија се $\lambda_1 = 2+\sqrt{2}$ и $\lambda_2 = 2-\sqrt{2}$. Според тоа, општо решение на диференцната равенка (5) е дадено со

$$y_n = C_1(2+\sqrt{2})^n + C_2(2-\sqrt{2})^n,$$

каде константите се одредуваат од почетните услови, при што добиваме $C_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ и $C_2 = -\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, па затоа

$$a_{2n} = y_n = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}], \ n = 1, 2, ...$$