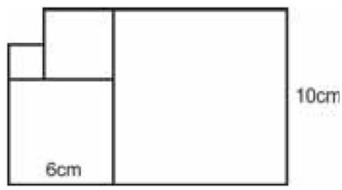
XL РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

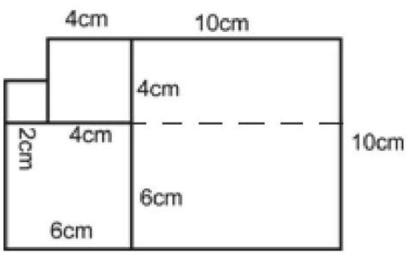
IV одделение

Задача 1. Баба Биле од пазар купила јаболка. Внуците на баба Биле за ужинка изеле половина од вкупниот број јаболка. Дедото на внуците за ужинка изел едно јаболко. Кога внуците вечерта изеле уште половина од преостанатите јаболка, останале само уште три јаболка. Колку вкупно јаболка купила баба Биле?

Решение. Бидејќи вечерта останале уште три јаболка, заклучуваме дека внуците вечерта изеле три јаболка. Пред тоа биле 6 јаболка. Едно јаболко изел дедото, па пред тоа имало 7 јаболка. Последното значи дека внуците за ужина изеле 7 јаболка, што значи дека баба Биле вкупно купила $7+7=14$ јаболка.

Задача 2. Фигурата на цртежот десно е составена од четири квадрати. Одреди го нејзиниот периметар.

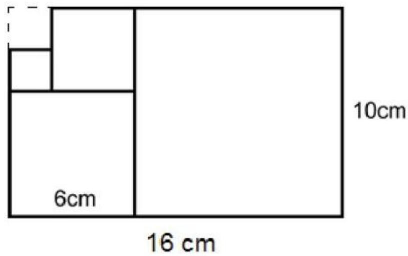




Решение. ***Прв начин.*** Ги одредуваме должините на страните на сите квадрати, како на цртежот лево. Имено, должината на страната на вториот квадрат по големина е еднаква на $10-6=4\,cm$, а на најмалиот квадрат е еднаква на $6-4=2\,cm$. Бараниот периметар изнесува

$16+10+14+2+2+2+6=52cm.$

Втор начин. Фигурата има периметар еднаков на периметарот на правоаголник со страни 16*cm* и 10*cm*, како на цртежот.



Затоа,

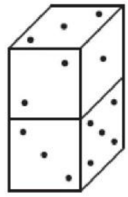
$$L=2\cdot(10+16)=52\,cm.$$

Задача 3. Колку непарни трицифрени броеви постојат, кај кои цифрата на десетките е 4?

Решение. Цифрата на единиците може да биде 1, 3, 5, 7 или 9, што значи дека имаме 5 можности. Цифрата на десетки е 4, што значи дека имаме 1 можност. Цифрата на стотките може да биде: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, што значи дека имаме 9 можности.

Конечно, бројот на бараните броеви е $5\cdot1\cdot9=45$.

Задача 4. На секоја од двете коцки збирот на бројот на точки на секој пар спротивни ѕидови е 7. На цртежот, три од хоризонталните ѕидови на двете коцки не се видливи. Колкав е збирот на бројот на точки на тие три ѕида на коцките на цртежот?



Решение. Збирот на бројот на точки на секој пар спротивни ѕидови е 7, па збирот на двата пара хоризонтални ѕидови на двете коцки е 14. На горниот (видлив) ѕид има 3 точки, па на останатите 3 ѕида (невидливи) има $14-3=11$ точки.

V одделение

Задача 1. Лубеница и диња имаат вкупна маса 30 *kg*. Дињата и тег од 3 *kg* имаат двојно помала маса отколку што е масата на лубеницата. Колку килограми изнесува разликата на масите на лубеницата и дињата?

Решение. Бидејќи масата на една лубеница е двојно поголема од масата на една диња и 3 *kg*, тоа значи дека масата на една лубеница е еднаква на масата на две дињи и 6 *kg*. Лубеницата и дињата имаат маса 30 *kg*, па 2 дињи и уште 1 диња и 6 *kg* имаат маса 30 *kg*, односно 3 дињи и 6 *kg* имаат маса 30 *kg*. Значи, 3 дињи имаат маса $30-6=24\,kg$, па затоа една диња има маса $24:3=8\,kg$. Според тоа, масата на лубеницата е $30-8=22\,kg$, па разликата на масите на лубеницата и дињата е $22-8=14\,kg$.

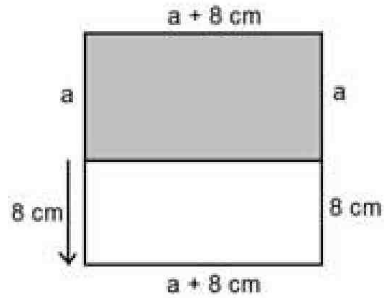
Задача 2. Два ѕидни часовника се наместени да покажуваат точно време на 21.03.2022 година во 9 часот навечер. Едниот работи точно, а другиот брза по 3 минути на секој час. На кој датум и во колку часот стрелките на двата часовника ќе бидат пак во иста положба како на 21.03.2022 година во 9 часот навечер?

Решение. За да постигнат поклопување на стрелките, часовникот кој брза треба да постигне предност од 12 часа. Дванаесет часа се 720 минути.

Тоа се 720 : 3 = 240 часа. Но, 240 часа се 10 дена. Часовниците ќе бидат во иста положба на 31.03.2022 во 9 часот навечер.

Задача 3. Ако едната страна на правоаголникот се зголеми за 8 *cm,* се добива квадрат со периметар 6,8 *dm*. Колкав е периметарот на правоаголникот изразен во сантиметри?

Решение. *Прв начин.* Периметарот на квадратот е $6{,}8\,dm = 68\,cm$. Нека a е помалата страна на правоаголникот. Периметарот на квадратот е $L = 4(a+8)$, што значи дека $4(a+8) = 68$, т.е. $a+8 = 17$, од каде се добива дека $a = 9\,cm$. Според тоа



$$L' = 2(a+a+8) = 2(9+17) = 52\,cm.$$

Втор начин. Периметарот на квадратот е $6{,}8\,dm = 68\,cm$. Квадратот со периметар 68 *cm* има страна $68:4 = 17\,cm$. Тоа е едната страна на правоаголникот, а другата страна е еднаква на $17-8 = 9\,cm$.

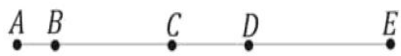
Конечно, периметарот на правоаголникот е

$$L' = 2(9+17) = 52\,cm.$$

Трет начин. Периметарот на квадратот е $6{,}8\,dm = 68\,cm$. Кога едната страна на правоаголникот се зголемува за $8\,cm$, тогаш неговиот периметар се зголемува за $2\cdot 8 = 16\,cm$. Значи, периметарот на правоаголникот е еднаков на $68-16 = 52\,cm$.

Задача 4. На една права се нанесени точките A, B, C, D, E по тој редослед. Растојанието меѓу средните точки на отсечките AB и DE е 16 *cm*, а растојанието меѓу средните точки на отсечките BC и CD е 6 *cm*. Пресметај ја должината на отсечката AE .

Решение. Имаме, $\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD}$. Понатаму, $\frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD} = 6\,cm$, па затоа



$\overline{BD} = 2\cdot 6 = 12\,cm$. Исто така, $\frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{DE} = 16\,cm$, од каде добиваме $\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DE} = 16-12 = 4\,cm$. Конечно,

$$\overline{AE} = 16 + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DE} = 16+4 = 20\,cm.$$

VI одделение

Задача 1. Во квадрат со плоштина $16\,dm^2$, две паралелни страни се продолжени при што се добил правоаголник со плоштина $28\,dm^2$. Одреди ги страните на правоаголникот.

Решение. Од формулата за плоштина на квадрат $P = a^2$ добиваме $a^2 = 16\,dm^2$, па затоа $a = 4\,dm$. Едната страна на правоаголникот е $a = 4\,dm$, па ако страната која е добиена со продолжувањето ја означиме со b добиваме $ab = 28\,dm^2$, од каде наоѓаме $4b = 28$, т.е. $b = 7\,dm$.

Задача 2. Марко замислил еден број. Бројот го намалил за 12,12 и добиената разлика ја поделил со $\frac{1}{5}$, на добиениот резултат додал 1,85 и добиениот збир го поделил со 0,1. Така го добил бројот 68,5. Кој број го замислил Марко?

Решение. *Прв начин.* Нека замислениот број е x. Според условот на задачата ја имаме равенката

$$((x-12{,}12):\tfrac{1}{5}+1{,}85):0{,}1=68{,}5\,,$$

шие решение е $x = 13{,}12$. Значи, Марко го замислил бројот 13,12.

Втор начин. Бројот 68,5 е добиен по делењето на некој број со 0,1, што значи дека пред тоа Марко го добил бројот $68{,}5\cdot 0{,}1 = 6{,}85$. Овој број Марко го добил со додавање на бројот 1,85, па затоа претходниот број е $6{,}85-1{,}85=5$. Бројот 5 е добиен со делење на претходниот број со $\frac{1}{5}$, па затоа претходниот број е $5\cdot\frac{1}{5}=1$. Конечно, бројот 1 е добиен кога замислениот број е намален за 12,12, па затоа замислениот број е $1+12{,}12=13{,}12$.

Задача 3. Цифрата на стотките во даден трицифрен број е 7. Ако таа цифра ја преместиме на местото на единиците, цифрата на десетките ја преместиме на местото на стотките и цифрата на единиците ја преместиме на местото на десетките, ќе се добие нов трицифрен број кој е за 567 помал од дадениот број. Најди го дадениот број.

Решение. Нека почетниот број е бројот $\overline{7xy}$, каде x и y се цифри. Од условот на задачата добиваме

$$\overline{7xy}=567+\overline{xy7}\text{, т.е. } 700+\overline{xy}=567+10\overline{xy}+7\text{,}$$

од каде наоѓаме $9\overline{xy}=126$, т.е. $\overline{xy}=14$. Конечно, бараниот број е 714.

Задача 4. На група од дванаесет луѓе, во која има и мажи и жени и деца, им се дадени дванаесет сомуни леб, што тие ги изеле. Притоа, секој маж изел по сомун и пол леб, секоја жена изела по половина сомун леб, и секое дете изело по четвртина сомун леб. Колку биле мажи, колку жени и колку деца во таа група?

Решение. Нека во групата имало x мажи, y жени и z деца. Од условот на задачата следува

$$x+y+z=12 \text{ и } \tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{4}z=12.$$

Од првата равенка имаме $x=12-y-z$ и ако замениме во втората добиваме

$$\tfrac{3}{2}(12-y-z)+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{4}z=12\text{, т.е. } y=6-\tfrac{5}{4}z.$$

Бидејќи x, y, z се природи броеви, единствена можност е $z=4$, од каде добиваме $y=6-\frac{5}{4}\cdot 4=1$ и $x=12-1-4=7$.

Значи во групата биле седум мажи, една жена и четири деца.

VII одделение

Задача 1. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 7, а при делење со 2, 3, 4, 5 и 6 дава остаток 1.

Решение. Ако x е бараниот број, тогаш $x-1$ е делив со 2, 3, 4, 5 и 6, што значи дека $x-1=k\cdot \text{NZS}(2,3,4,5,6)=60k$, каде k е природен број. Значи, $x=60k+1$. Најмалиот број од обликот $60k+1$ кој е делив со 7 се добива за $k=5$. Бараниот број е $x=60\cdot 5+1=301$.

Задача 2. Ана, Марија и Јован добиле текст за преведување од англиски на македонски јазик. На Ана и Марија, ако работат заедно им се потребни 30 часови за да го преведат текстот, на Ана и Јован им се потребни 42 часа, а на Марија и Јован 35 часови. Колку време (во часови и минути) им е потребно на Ана, Марија и Јован за да го преведат текстот, ако работат сите тројца заедно?

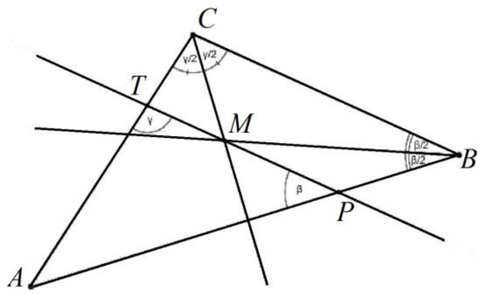
Решение. Ана и Марија, ако работат заедно, за 1 час преведуваат $\frac{1}{30}$ од текстот. Ана и Јован, ако работат заедно, за 1 час преведуваат $\frac{1}{42}$ од текстот. Марија и Јован, ако работат заедно, за 1 час преведуваат $\frac{1}{35}$ од текстот. Според тоа, ако работат тројцата заедно, за 1 час преведуваат $(\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{35}):2=\frac{3}{70}$ од текстот. Ако со T го означиме времето потребно за преведување на целиот текст, кога сите тројца работат заедно, добиваме дека $\frac{3}{70}T=1$, односно $T=\frac{70}{3}=23\frac{1}{3}h$. Значи, на Ана, Марија и Јован им се потребни 23 часа и 20 минути, за да го преведат текстот, работејќи сите заедно.

Задача 3. Даден е триаголник ABC и точка M во него, таква што полуправите BM и CM ги делат $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCA$, соодветно, на по два еднакви дела. Низ точката M е повлечена права p паралелна со страната BC. Правата p ги сече страните AB и AC, соодветно, во точките P и T. Докажи дека

$$\overline{BP}+\overline{CT}=\overline{PT}.$$

Решение. Од условот на задачата правата p е паралелна со страната BC на $\triangle ABC$. Според тоа AB е трансферзала на p и BC, од каде следува $\measuredangle MPA=\measuredangle CBA=\beta$. Ова значи дека $\measuredangle MPB=180^\circ-\beta$, па затоа

$$\measuredangle BMP=180^\circ-(180^\circ-\beta+\frac{\beta}{2})=\frac{\beta}{2}.$$



Значи, $\measuredangle PBM=\measuredangle BMP=\frac{\beta}{2}$, па затоа $\triangle BMP$ е рамнокрак. Аналогно се заклучува дека правата AC е трансферзала на p и BC, па $\triangle MCT$ е рамнокрак. Од тука се добива дека $\overline{BP}=\overline{PM}$ и $\overline{CT}=\overline{TM}$, па затоа

$$\overline{BP}+\overline{CT}=\overline{PM}+\overline{MT}=\overline{PT}$$

Задача 4. На секој ѕид на една коцка е запишан по еден природен број. На секое теме (ќош) на коцката е запишан производот од трите броја кои се запишани на ѕидовите кои го формираат темето (ќошот). Збирот на осумте така добиени производи е 385. Одреди го збирот на броевите кои се запишани на ѕидовите на коцката.

Решение. Нека a, b, c, d, e, f се природните броеви кои се запишани на ѕидовите на коцката, така што a и b се броеви запишани на спротивни ѕидови, броевите c и d се запишани на спротивни ѕидови и броевите e и f се запишани на спротивни ѕидови. На темињата на коцката се запишани следните броеви $ace, acf, ade, adf, bce, bcf, bde, bdf$. Од условот на задачата се добива

$$ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf=(a+b)(c+d)(e+f)=385.$$

Единствен начин да се запише бројот 385 како производ од три множители поголеми од 1 е $385=5\cdot 7\cdot 11$, од каде следи дека

$$a+b+c+d+e+f=(a+b)+(c+d)+(e+f)=5+7+11=23.$$

VIII одделение

Задача 1. Во текот на учебната година Коста правел неколку тестови по математика и притоа освоил одреден број поени. Ако Коста на следниот тест по математика освои 89 поени, тогаш просечниот број на освоени поени од тестовите ќе биде 91. Но, ако на следниот тест освои 64, тогаш просечниот број на освоени поени ќе биде 86. Колку тестови по математика направил Коста досега?

Решение. Нека n е бројот на досега направени тестови по математика, а x е вкупниот број на освоени поени од досегашните тестови. Ако на следниот тест по математика Коста освои 89 поени, тогаш вкупниот број на освоени поени ќе биде $x+89$, а бројот на тестови $n+1$. Според тоа, ја добиваме равенката $\frac{x+89}{n+1}=91$. Доколку пак на следниот тест по математика Коста освои 64 поени, тогаш вкупниот број на освоени поени ќе биде $x+64$, а бројот на тестови останува ист, т.е $n+1$. Тогаш ја добиваме равенката $\frac{x+64}{n+1}=86$. Ако ги поделиме овие равенки добиваме $\frac{x+89}{x+64}=\frac{91}{86}$, од каде наоѓаме $x=366$. Конечно, $n+1=\frac{366+89}{91}$, т.е. $n=4$. Значи, Коста направил 4 тестови по математика.

Задача 2. Определи ги целите броеви m и n за кои е исполнето

$$\frac{147\cdot 7^3+28\cdot 7^4}{7^n}=7^m \text{ и } \frac{5^4\cdot 25^2}{125^m\cdot 5^{-10}}=5^n.$$

Решение. Со елементарни треансформации лесно се добива дека дадените равенки се еквивалентни на равенките

$$7^{6-n}=7^{m} \text{ и } 5^{18-3m}=5^{n},$$

од каде добиваме $6-n=m$ и $18-3m=n$. Ако од втората равенка замениме во првата добиваме

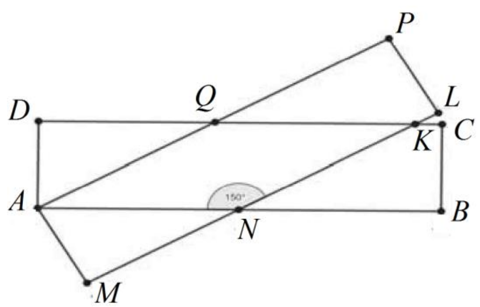
$$6-(18-3m)=m, \text{ т.е. } m=6,$$

па затоа, $n=18-3\cdot 6=0$

Задача 3. Ивана и Марија отишле на излет. Ивана носела бонбони, а Марија сливи. Половина од своите бонбони Ивана ѝ ги дала на Марија, а половина од своите сливи Марија ѝ ги дала на Ивана. Потоа, Ивана изела 5 сливи по што ѝ останале три пати повеќе бонбони од сливи, а Марија изела 20 бонбони по што ѝ останале два пати помалку сливи од бонбони. Колку бонбони однела Ивана и колку сливи однела Марија на излетот?

Решение. Нека b е бројот на бонбоните на Ивана, а s е бројот на сливите на Марија. Откако Ивана ѝ ги дала на Марија половина од своите бонбони, а Марија ѝ ги дала на Ивана половина од своите сливи, секоја од нив имала $\frac{b}{2}$ бонбони и $\frac{s}{2}$ сливи. Од тоа што кога Ивана изела 5 сливи ѝ останале три пати повеќе бонбони од сливи, добиваме дека $\frac{b}{2}=3(\frac{s}{2}-5)$. Од тоа што кога Марија изела 20 бонбони ѝ останале два пати помалку сливи од бонбони, добиваме дека $\frac{b}{2}-20=2\cdot\frac{s}{2}$, т.е. $\frac{b}{2}=20+s$. Според тоа, $20+s=3(\frac{s}{2}-5)$, од каде наоѓаме $s=70$. Конечно, $\frac{b}{2}=20+70$, односно $b=180$. Значи, Ивана на излетот понела 180 бонбони, а Марија 70 сливи.

Задача 4. Два складни правоаголника $ABCD$ и $AMLP$ со должини на страни $\overline{AB}=\overline{ML}=24cm$ и $\overline{BC}=\overline{LP}=6cm$ се преклопуваат како на цртежот десно. Пресечната точка на страните AP и CD е точката Q, а пресечните точки на страната ML со страните AB и CD се точките N и K, соодветно. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ANKQ$ и должината на отсечката NB, ако $\measuredangle ANL=150^\circ$.



Решение. Имаме,

$$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{ML}=\overline{PA}=24cm \text{ и } \overline{BC}=\overline{LP}=\overline{DA}=\overline{AM}=6cm.$$

Од тоа што четириаголникот $ABCD$ е правоаголник, $N\in AB$ и $K,Q\in CD$, за AN и KQ важи $AN\parallel KQ$, и од тоа што четириаголникот $AMLP$ е правоаголник, $Q\in AP$ и $N,K\in ML$ за AQ и NK важи $AQ\parallel NK$. Значи, четириаголникот $ANKQ$ е паралелограм. Од $\measuredangle ANL=150^\circ$ следува дека $\measuredangle BNL=180^\circ-\measuredangle ANL=180^\circ-150^\circ=30^\circ$, т.е. $\measuredangle NAQ=30^\circ$. Според тоа, важи $\measuredangle QAD=90^\circ-\measuredangle NAQ=90^\circ-30^\circ=60^\circ$. Триаголникот QDA е правоаголен, па затоа $\measuredangle DQA=90^\circ-\measuredangle QAD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. Значи, $\overline{AQ}=2\overline{AD}=12cm$. Од тоа што четириаголникот $ANKQ$ е паралелограм и AM и AD се негови висини, добиваме дека $P_{ANKQ}=\overline{AN}\cdot\overline{AD}$ и $P_{ANKQ}=\overline{NK}\cdot\overline{AM}$. Оттука имаме $\overline{AN}\cdot\overline{AD}=\overline{NK}\cdot\overline{AM}$. Но, $\overline{AM}=\overline{AD}$ и $\overline{NK}=\overline{AQ}$, па добиваме дека $\overline{NK}=\overline{AN}$, односно $\overline{AN}=\overline{NK}=\overline{AQ}=12cm$.

Според тоа, плоштината на четириаголникот $ANKQ$ е еднаква на $P_{ANKQ}=72\,cm^2$. Од $\overline{NB}=\overline{AB}-\overline{AN}$, добиваме дека $\overline{NB}=12\,cm$.

IX одделение

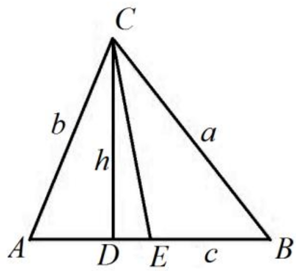
Задача 1. Нека a,b,c се броеви различни од нула, такви што $b(c+a)$ е аритметичка средина на броевите $a(b+c)$ и $c(a+b)$. Ако $b=\frac{2019}{2020}$, пресметај ја аритметичката средина на броевите $\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$.

Решение. Од условот на задачата имаме $2b(c+a)=a(b+c)+c(a+b)$, што е еквивалентно со $2ac=ab+bc$. Но, $abc\neq 0$, па од последното равенство следува равенството $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$. Користејќи го последното равенство, за бараната аритметичка средина се добива

$$\frac{1}{3}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=\frac{1}{3}((\frac{1}{a}+\frac{1}{c})+\frac{1}{b}))=\frac{1}{3}(\frac{2}{b}+\frac{1}{b})=\frac{1}{b}=\frac{2020}{2019}.$$

Задача 2. Во остроаголниот $\triangle ABC$ должините на страните a, b и c се поврзани со релацијата $a+b=2c$, каде што $a>b$. Од темето C се повлечени висина CD и тежишна линија CE. Докажи дека $\overline{DE}=a-b$.

Решение. Точката E е средишна за страната c, па важи $\overline{AE}=\overline{BE}=\frac{c}{2}$. Од триаголникот ADC имаме дека



$$h^2=b^2-\overline{AD}^2=b^2-(\tfrac{c}{2}-\overline{DE})^2,$$

а од триаголникот BDC имаме дека

$$h^2=ba^2-\overline{BD}^2=a^2-(\tfrac{c}{2}+\overline{DE})^2$$

Со изедначување на висините добиваме

$$b^2-(\tfrac{c}{2}-\overline{DE})^2=a^2-(\tfrac{c}{2}+\overline{DE})^2,$$

и по средувањето на равенството добиваме

$$2c\overline{DE}=a^2-b^2.$$

Но, $a+b=2c$, па од последното равенство добиваме

$$(a+b)\overline{DE}=(a-b)(a+b)\text{, т.е. }\overline{DE}=a-b$$

што требаше да се докаже.

Задача 3. Годините на таткото и неговите две деца (не се близнаци) се степени на ист прост број. Пред една година бројот на годините на секој од нив бил прост број. Колку години има сега таткото, а колку има секое од неговите деца? (Познато е дека такото има помалку од сто години)

Решение. Нека p^a, p^b, p^c се бараните броеви на годините, каде што p е прост број, а a, b и c се природни броеви. По услов на задачата имаме дека пред една година броевите на годините p^a-1, p^b-1, p^c-1 се прости броеви. Ако $p=2$, тогаш степените на бројот 2 се: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... Од нив ги избираме оние од кои кога ќе се одземе 1 се добива прост број. Тоа се броевите 4, 8 и 32 (бидејќи $4-1=3, 8-1=7, 32-1=31$). Бидејќи таткото има помалку од 100 години, единствена можност е таткото да има 32 години, едното дете 8 години и другото 4 години.

Ако $p\geq 3$, тогаш p^a, p^b, p^c се непарни броеви. Кога од нив ќе се одземе бројот 1 се добиваат различни парни броеви, па затоа сите три не може да се прости броеви.

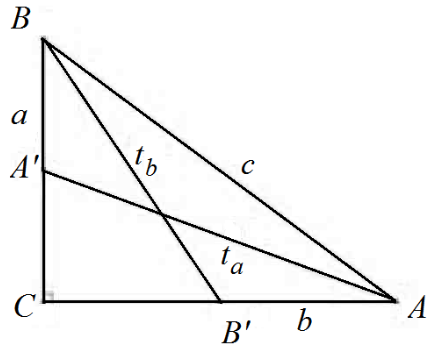
Задача 4. Ако тежишните линии на правоаголен триаголник може да се страни на правоаголен триаголник, тогаш должината на барем една катета на дадениот триаголник е ирационален број. Докажи!

Решение. Имаме:

$t_a^2 = b^2 + (\frac{a}{2})^2, t_b^2 = a^2 + (\frac{b}{2})^2, t_c = \frac{c}{2}$

Од

$$t_c^2 = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4} = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2$$



следува дека t_c е помала и од t_a и од t_b. Нека со тежишните линии на дадениот триаголник може да се формира правоаголен триаголник. Тогаш една од нив е најголема, т.е. е хипотенуза, а тоа може да е t_a или t_b. Без губење на општост, нека е тоа t_b. Тогаш според Питагоровата теорема важи: $t_b^2 = t_a^2 + t_c^2$. Оттука и од горните равенства следува

$$a^2 + (\frac{b}{2})^2 = b^2 + (\frac{a}{2})^2 + \frac{c^2}{4}, \text{ т.е. } 3a^2 = 3b^2 + c^2.$$

Но, $a^2 + b^2 = c^2$, и со замена во последното равенство добиваме $a^2 = 2b^2$, т.е. $a = b\sqrt{2}$. Ако b е ирационален број, доказот е завршен. Ако b е рационален број, тогаш a е ирационален број и доказот е завршен.