Ристо Малчески
Скопје

ПРОБЛЕМ НА ПАРКЕТИРАЊЕ

Кај старите култури, особено египетската, се истакнуваат градбите со богата орнаментика. Арапите смилсата за орнаменти ја наследиле од Египќаните, но тие и понатаму ја усовршувале за што сведочат арабеските на прекрасните арапски градби од средниот век. Со пропаста на арапската држава, а потоа и застојот во развитокот на арапската култура се губи и важноста на орнаментите при украсување на градбите, па затоа денешните ретки орнаменти во поголемиот дел од случаите се копии на орнаментите од стариот и средниот век.

Тежнеењето ѕидовите и подовите де се украсуваат со геометриски фигури всушност е причина за појава на проблемот на паркетирање, т.е. проблемот како може рамнината или некој нејзин дел да се подели на геометриски фигури, кои целосно и еднократно би ја покривале, но при некои услови, кои фигурите треба да ги задоволуваат во врска со нивниот облик, вид и распоред.

Пред да преминеме на разработка на проблемот на паркетирање ќе дадеме дефиниции на неколку основни поими.

Под **паркетирање** се подразбира покривање на рамнината, или определен нејзин дел со геометриски фигури, така што се исполнети следните услови:

- меѓу фигурите нема празнини, и
- фигурите немаат заеднички точки, освен точките на рабовите.

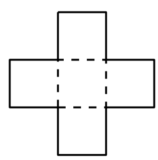
Сликата која се добива на овај начин се нарекува **паркет**.

Во нашите разгледувања ќе се осврнеме на паркетирањето со помош на многуаголници. Во врска со ваквото паркетирање ги воведуваме следните поими.

Точката во која при паркетирањето се совпаѓаат два соседни многуаголници ја нарекваме **теме на паркетирањето**. Ако сите агли при едно теме се еднакви, тогаш темето ќе го нарекуваме **правилно**. За две темиња ќе велиме дека се **складни**, ако аглите при темињата се два по два складни и ако тие околу темињата се подредени во ист или обратен редослед.

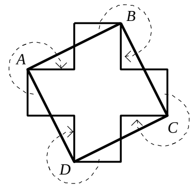
2. Претворање на “грчкиот крст” во квадрат

Фигурата составена од пет складни квадрати со страна a, како што е прикажано на цртеж 1, е таканаречениот “*грчки крст*”. Следната задача потекнува уште од древна Индија.



Црт. 1

Задача 1. Да се подели грчкиот крст на делови од кои може да се состави квадрат.



Црт. 2

Решението на задачата е дадено на црт. 2. Иако цртежот зборува сам за себе, сепак постои можност очите да не излажат. Во случајот е неопходен строг доказ, што ние овде и ќе го направиме. За таа цел ќе докажеме дека:

i) четириаголникот $ABCD$ е квадрат, и

ii) квадратот $ABCD$ може да се состави од петте делови на кои грчкиот крст се распаѓа после повлекувањето на отсечките AB, BC, CD, DA.

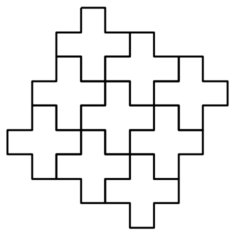
Навистина, користејќи ја питагоровата имаме

$$\overline{AB}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=a\sqrt{5}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA},$$

што значи дека четириаголникот $ABCD$ е ромб. Бидејќи триаголниците добиени со поврзување на точките A,B,C и D на црт. 2 се складни, (тие се правоаголни, со еднакви агли и една катета со должина a) заклучуваме дека $\angle A=90^0$, т.е $ABCD$ е квадрат. Од претходно изнесеното следува дека важи и ii), При што квадратот го формираме како што е покажано со стрелките на црт. 2.

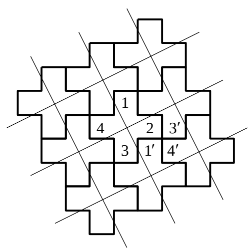
Меѓутоа, работата на претворањето на грчкиот крст во квадрат не е завршена. Во математиката се тежнее кон изнаоѓање на подобро, поелегантно решение. Затоа следната задача се надоврзува на задача 1.

Задача 2. Да се подели грчкиот крст на 4 делови, така што од нив да може да се состави квадрат.

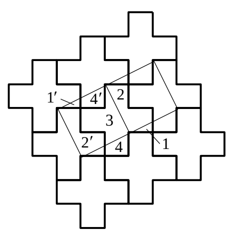

Црт. 3

Решението на задача 2 ќе го дадеме со примена на паркет составен од складни копии на грчкиот крст (црт. 3). При внимателно набљудување на црт. 3 забележуваме дека центрите на грчките крстови се рамномерно распоредени на рамнината. На црт. 4 тие центри се означени и низ нив се повлечени прави. На тој начин е добиена квадратна мрежа. Навистина, како и во задача 1 од питагоровата теорема следува дека добиените четириаголници се со страна $\sqrt{(\frac{a}{2}+\frac{3a}{2})^2+(\frac{a}{2}+\frac{a}{2})^2}=a\sqrt{5}$, т.е. тие се ромбови. Слично, како и во претходниот доказ се докажува дека аголот во едно од темињата на овие ромбови е 90^0, што значи дека ромбовите се квадрати.

Со оваа мрежа секој од грчките крстови е поделен на четири делови: 1,2,3 и 4. Од друга страна, рабовите на грчките крстови го делат секој квадрат на мрежа од четири делови $1', 2', 3'$ и $4'$. Јасно, 1 и $1'$; 2 и $2'$; 3 и $3'$; 4 и $4'$ се складни.



Црт. 4



Црт. 5

Со тоа задачата е решена, т.е. грчкиот крст е поделен само на четири делови од кои е составен квадрат, наместо на пет делови, како во задача 1.

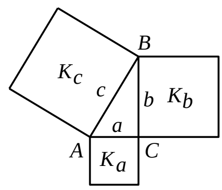
Интересно е да се забележи дека при оваа поделба на грчкиот крст сите четири делови се складни. Меѓутоа, паркетот наметнува повеќе можности за поделба на грчкиот крст на четири дела.

Ќе го направиме го следниот експеримент. Ја цртаме квадратната мрежа од црт. 4 на проѕирна фолија, ја ставаме фолијата на паркетот од црт. 3 и истата ја поместуваме. Така можеме да добиеме различни решенија на задача 2. Едно од нив е прикажано на црт. 5.

Забелешка. До сега не е познато дали може грчкиот крст да се подели на помалку од четири дела така, што од нив може да се состави квадрат.

3. Доказ на Питагоровата теорема со помош на паркет

Задача 3. Триаголникот ABC е правоаголен со катети BC и CA, чии должини се a и b, соодветно и хипотенуза AB со дожина c. Квадратите K_a, K_b и K_c, се конструирани над страните BC, CA и AB, (црт. 6) соодветно. Ќе докажеме дека збирот на плоштините на квадратите K_a и K_b е еднаков на плоштината на квадратот K_c.



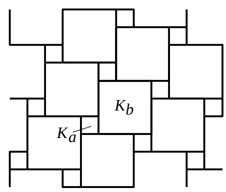
Црт. 6

Решението на задачата може да се изведе на повеќе добро познати начини. Еден од нив се сведува на користење на паркет направен од складни копии на квадратите K_a и K_b, како што е прикажано на црт 7.

На црт. 8 е конструирана решетка на овој паркет. Решетката се состои од прави паралелни на правите AB и BD. Слично, како и кај грчкиот крст можеме да докажеме дека:

i) Решетката на црт. 8 е квадратна, при што квадратите на решетката се складни со квадратот K_c.

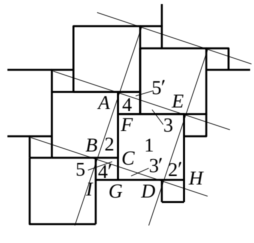
ii) Квадратот $ABDE$ со линиите на решетката е поделен на пет делови 1,2,3,4,5. Квадратот $EFGH$ е поделен на деловите 1, 2' и 3', а квадратот $CBIG$ на деловите 4' и 5, така што деловите 2 и 2'; 3 и 3'; 4 и 4'; 5 и 5' се складни.



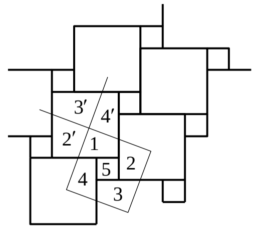
Црт. 7

Според тоа, од i) и ii) следува дека од деловите на квадратите K_a и K_b може да се состави квадратот K_c. Значи:

Збирот на плоштините на квадратите над катетите во правоаголен триаголник е еднаков на



Црт. 8



Црт. 9

плоштината на квадратот над хипотенузата.

Да забележиме дека, како и при решавањето на задача 1 и овде на фолија може да се нацрта квадратна мрежа од цртеж 8. Кога таа фолија ќе се стави на паркетот од цртеж 7 и ќе се придвижи по хартијата, се добиваат различни начини на поделби на квадратот $ABDE$ на делови од кои можат да се состават квадратите K_a и K_b. Еден таков начин е даден на црт. 9. Притоа квадратот $ABDE$ е транслатиран од првобитната положба на црт. 8 така што темето A е поместено во центарот на квадратот $EFGH$. Ова поделба е интересна бидејќи квадратот K_a не е поделен, а квадратот K_b е поделен на четири складни делови.

4. Примена на паркетирањето во алгебрата

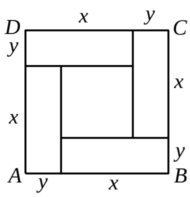
Во продолжение ќе покажеме како паркетирањето може да ни послужи за откривање на некои врски меѓу различните математички дисциплини. За таа цел ќе разгледаме неколку задачи.

Задача 1. Претстави го бројот 11 како збир на два броја x и y, така да производот xy е максимален.

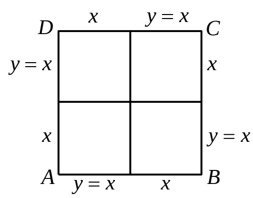
Решението на оваа задача може да се добие така што задачата ќе ја преведеме на “јазикот на геометријата”. Имено, производот xy на броевите x и y можеме да ги сметаме за плоштина на правоаголник со страни x и y. Периметарот на овој правоаголник е $2(x+y)=22$. Според тоа, задачата 1 може да се преформулира на следниот начин:

Задача 1'. Од сите правоаголници со периметар 22 да се најде оној чија плоштина е максимална.

Задачата ќе ја решиме користејќи го паркетирањето. Паркетираме квадрат $ABCD$ во кој имаме четири копии на правоаголник со страни x и y. На црт. 12 е дадено паркетирање на квадратот $ABCD$ во случај кога $x \neq y$, на пример $x > y$, а на црт. 13 кога $x = y$. Во првиот случај паркетот, покрај четирите правоаголници со страни x и y го содржи и квадратот со страна $x-y$. Според тоа, плоштината xy е помала од четвртината плоштина на квадратот $ABCD$: $xy < \frac{11^2}{4}$, за $x \neq y$



Црт. 12



Црт. 13

Во вториот случај, правоаголниците со страни x и y се квадрати, т.е. четирите квадрати со страните $x = \frac{11}{2}$ го покриваат квадратот $ABCD$. Со други зборови $xy = \frac{11^2}{4}$, за $x = y$.

Од досега изнесеното следува: од сите правоаголници со даден периметар 22, квадратот има најголема плоштина. Со тоа ја решивме задачата 1', со што е решена и задачата 1. Имено, производот на броевите x и y чиј збир е 11 е максимален кога собироците се еднакви, т.е. $x = y = \frac{11}{2}$.

Максималната вредност на производот xy е еднаков на $\left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$.

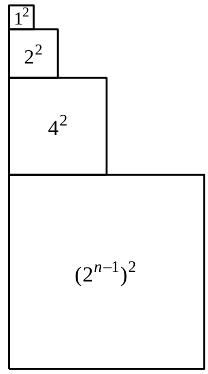
Задача 2. Најди формула за пресметување на збирот

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2 + \ldots + (2^{n-1})^2, \text{ каде } n = 1, 2, \ldots$$

Задачата ќе ја решиме со паркетирање на пригодно избрана геометриска фигура. Квадратите

$$1^2, 2^2, 4^2, \ldots., (2^{n-1})^2$$

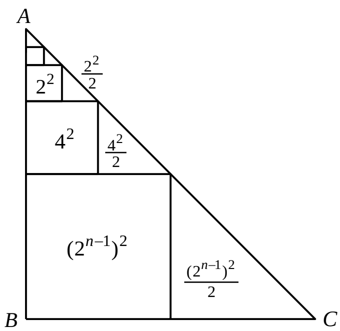
можат да се толкуваат како плоштини на квадрати со страни $1, 2, 4, \ldots., 2^{n-1}$, соодветно. Од овие квадрати може да се конструира фигурата прикажана на црт. 14.



Црт. 14

Оваа фигура може да се дополни до правоаголен ΔABC со катети со должини 2^n, (црт. 15). Притоа се искористени правоаголни триаголници со плоштини

$$\frac{1^2}{2}, \frac{1^2}{2}, \frac{2^2}{2}, \frac{4^2}{2} \ldots, \frac{(2^{n-1})^2}{2}.$$



Црт. 15

Сега паркетирањето ни овозможува да ја пресметаме плоштината на ΔABC на два начина. Од едната страна имаме

$$P_{\Delta ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{2^n \cdot 2^n}{2} = 2^{2n-1} \qquad (1)$$

и

$$P_{\Delta ABC} = \left[1^2 + 2^2 + \ldots + (2^{n-1})^2\right] + \left[\frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{(2^{n-1})^2}{2}\right] \qquad (2)$$

т.е. $P_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}[1^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2^{n-1})^2] + \frac{1}{2}$ од што следува $S_n = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2 + \ldots + (2^{n-1})^2 = \frac{2^{2n}-1}{3}$.

Забелешка. Црт. 15 ни овозможува лесно да го определиме збирот

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1}.$$

Имено, ΔABC е рамнокрак. Страната BC на ΔABC е со должина 2^n, а страната AB е поделена на отсечки со должини $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$.

Бидејќи $\overline{AB} = \overline{BC}$ добиваме $1 + (1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^n$ т.е.

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

5. Паркетирање на рамнината со помош на правилни полигони

Да ја разгледаме следната задача: *Да се најдат сите паркетирање на рамнината со помош на правилни многуаголници, кои може да имаат различен број на страни, но сите имаат иста должина на страна и сите темиња меѓусебно се складни.*

На десната страна на следниот цртеж се дадени две паркетирања кои ги задоволуваат условите на претходната задача.

Решение. Јасно, при паркетирањето збирот на аглите во секое теме е еднаков на 360^0, а внатрешниот агол на секој правилен n-аголник е еднаков на $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$.

Нека претпоставиме дека паркетирањето е реализирано со еден правилен многуаголник и нека секое теме е заедничко за точно k многуаголници. Според тоа, ја добиваме равенката $k\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}=360^0$, $k,n\in\mathbf{N}$ која е еквивалентна на равенката $\frac{1}{k}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$, $k,n\in\mathbf{N}$, т.е. на равенката

$$k=2+\frac{4}{n-2},\ k,n\in\mathbf{N}. \qquad (1)$$

Од последната равенка следува $(n-2)\,|\,4$, па затоа $n-2=4$ или $n-2=2$ или $n-2=1$, што значи

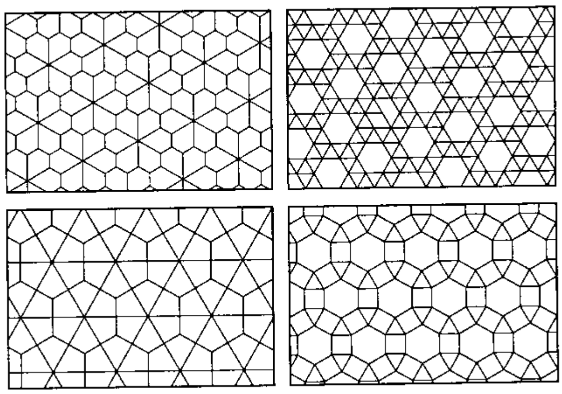
$$(n,k)\in\{(3;6),(4;4),(6,3)\}.$$

Значи, при претпоставка дека паркетирањето е извршено со еден правилен многуаголник добиваме дека тоа е можно со рамностран триаголник, квадрат или правилен шестаголник. Лесно се проверува дека и во трите случаи имаме паркетирања, кои им биле познати уште на Питагорејците.

Нека претпоставиме дека во паркетирањето учествува повеќе од еден правилен многуаголник. Бидејќи збирот на по еден внатрешен агол на правилните триаголник, четириаголник, петаголник и шест аголник е еднаков на

$$60^0+90^0+108^0+120^0=378^0>360^0$$

добиваме дека во ваквото паркетирање може да учествуваат најмногу три различни видови на правилни многуаголници.



Прво да го разгледаме случајот кога во паркетирањето учествуваат два вида правилни многуаголници. Ако со n_1 и n_2 го означиме бројот на страните на секој од овие многуаголници и ако во секое теме имаме по k_1 и k_2 многуаголници, тогаш аналогно на случајот кога во паркетирањето учествува еден правилен многуаголник ја добиваме равенката

$$k_1\frac{(n_1-2)\cdot 180^0}{n_1}+k_2\frac{(n_2-2)\cdot 180^0}{n_2}=360^0,$$

која е еквивалентна на равенката

$$k_1(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_1})+k_2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_2})=1. \qquad (2)$$

Прво да забележиме дека, заради симетричноста на равенката (2) во однос на променливите можеме да претпоставиме дека $k_1 \le k_2$. Понатаму, бидејќи внатрешниот агол на секој правилен многуаголник е помал од 180^0 добиваме дека секое теме на паркетирањето мора да е теме на најмалку три правилни многуаголници. Од друга страна, бидејќи внатрешниот агол на секој правилен многуаголник е поголем или еднаков на 60^0 заклучуваме дека секое теме на паркетирањето може да е теме на најмногу шест правилни многуаголници. Според тоа,

$$3 \le k_1+k_2 < 6 \text{ и } k_1 \le k_2. \qquad (3)$$

Од друга страна правилен многуагоник има најмалку три страни, па затоа

$$n_1 \ge 3, n_2 \ge 3. \qquad (4)$$

Од (3) следува дека можни вредности за k_1 и k_2 се вредностите дадени во следната табела:

k_1	1	1	1	2	2
k_2	2	3	4	2	3

За да ги определиме можните паркетирања за секоја од претоходните можности треба да ја решиме соодветната равенка, која се добива од равенката (2). Так ги добиваме следните равенки

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_1}+2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_2})=1,\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_1}+3(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_2})=1,\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_1}+4(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_2})=1,$$

$$2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_1})+2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_2})=1 \text{ и } 2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_1})+3(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_2})=1,$$

кои се еквивалентни на равенките

$$n_1=2+\tfrac{8}{n_2-4},\ n_1=1+\tfrac{3}{n_2-3},\ n_2=2+\tfrac{2n_1-4}{3n_1-2},\ n_1=2+\tfrac{4}{n_2-2} \text{ и } n_1=1+\tfrac{n_2+6}{3n_2-6}. \qquad (5)$$

Аналогно, како при решавањето на равенката (1) од равенките (5), ако се има предвид претходната табела за решението на равенката (2), т.е. за можните паркетирања со два правилни многуаголници добиваме:

k_1	1	1	1	1	2	2
n_1	3	4	10	6	3	4
k_2	2	2	2	4	2	3
n_2	12	8	5	3	6	3

Останува уште да го разгледаме случајот кога во паркетирањето учествуваат три видови правилни многуаголници. Ако со n_1, n_2 и n_3 го означиме бројот на страните на секој од овие многуаголници и ако во секое теме имаме по k_1, k_2 и k_3 многуаголници, тогаш аналогно на случајот кога во паркетирањето учествуваат два правилни многуаголници имаме

$$k_1(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_1})+k_2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_2})+k_3(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n_3})=1, \qquad (6)$$

при што е исполнето

$$3 \le k_1+k_2+k_3 < 6 \text{ и } k_1 \le k_2 \le k_3,\ n_1 \ge 3, n_2 \ge 3, n_3 \ge 3. \qquad (7)$$

На потполно аналоген начин во овој случај за можните паркетирања со три правилни многуаголници добиваме:

k_1	1	1	1	1	1	1	1	1
n_1	3	3	3	3	4	4	4	3
k_2	1	1	1	1	1	1	1	1
n_2	7	8	9	10	6	5	12	6
k_3	1	1	1	1	1	1	2	2
n_3	42	24	18	15	12	20	3	4

Претходните три табели допуштаат 17 можни паркетирања при дадените услови. Меѓутоа, не можеме однапред да очекуваме дека секое решение на равенките (1), (2) и (6) ќе даде и паркетирање при дадените услови, бидејќи овие равенки го даваат само потребниот услов за да паркетирањето е можно, а тоа е збирот на аглите во секое теме да биде 360^0. Навистина, ако земеме низа правилни многуаголници според било кое од можните решенија ќе забележиме дека тие многуаголници можеме да ги наредиме околу една точка, која е теме, така што збирот на аглите биде 360^0. Но во некои случаи, кога ќе се обидеме да продолжиме со паркетирањето ќе забележиме дека тоа не е можно. Така, на пример, веќе третото решение од втората табела, т.е. два петаголници и еден десетаголник, кое кратко го запишуваме (5,5,10) не дава паркетирање, бидејќи ниту сите темиња околу еден од петаголниците не може на тој начин да се оформат. Да забележиме дека 11 од претходно наведените 17 решенија овозможуваат паркетирање и тоа се следните низи многуаголници: (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4), (6,6,6), (3,12,12), (4,8,8), (3,6,3,6), (3,3,3,3,6), (3,3,4,3,4), (3,3,3,4,4), (4,6,12) и (3,4,6,4). Цртежите за паркетирањето во случаите (3,3,3,3,6) и (3,4,6,4) се дадени на десната страна на цртеж 16.

Во претходните излагања веќе споменавме дека паркетирањето може да се реализира на повеќе начини, при што треба да зададеме различни услови на правилност. На крајот од нашите разгледувања ќе презентираме уште еден таков случај. Во претходниот случај како услов ја зедовме правилноста на многуаголниците и складност на темињата. Сега да ги побараме сите оние паркетирања, за кои сите темиња се правилни, но не мора да се складни, додека за многуаголниците нема да бараме да се правилни, но ќе бараме да се меѓусебно складни и да се тангентни. На цртеж 17 (лево) се дадени две вакви паркетирања. И во овој случај можеме да добиеме равенки во кои непознатите се природни броеви, па решавајќи ги истите да ги определиме можните паркетирања кои ги задоволуваат овие услови. Но, оваа работа можеме да ја поедноставиме и да ги конструираме сите решенија на задачата од цртежите на веќе разгледуваните паркетирања со правилни многуаголници. На овие цртежи да спуштиме нормали од центрите на впишаните кружници кон страните на правилните многуаголници. Може да се докаже дека, ако тоа го направиме за секој многуаголник, тогаш добиваме ново паркетирање кое ги задоволува условите од втората задача. Ако за новодобиеното паркетирање ја повториме постапката, тогаш го добиваме почетното паркетирање, само во намалени димензии итн. По два такви цртежи се дадени во секој ред на цртеж 16.

Коментар. Во нашите разгледувања се задржавме на наједноставните случаи на паркетирањето и неговата примена, при што без поголеми тешкотии добивме низа интересни резултати. Меѓутоа, ако проблемот на паркетирање го разгледуваме во негова најопшта форма, тогаш самото паркетирање при однапред зададени услови нема да биде толку едноставно, а исто така и можностите за негова примена се далеку поголеми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цофман, Јудита: *Примена на паркетот при решавање на задачи,* Сигма, 48, Скопје, 2000
2. Bilinski, Stanko: *Problem parketiranja,* Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999

Статијата прв пат е објавена во списанието МАтематика+ во Софија