XV РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

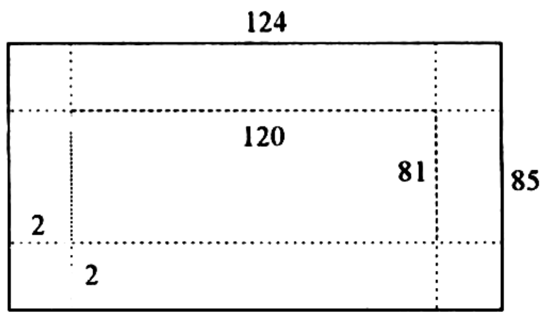
V-1. Што има помала плоштина - квадар со димензии 15 cm, 2 dm и 18 cm или коцка со раб 17 cm?

Решение: Нека a=15cm, b=2 dm=20cm, c=18cm, се димензиите на квадарот. Плоштината на квадарот е $P = 2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c$; $P = 2\cdot 15\cdot 20+ +2\cdot 15\cdot 18+ 2\cdot 20\cdot 18$; $P = 1860$ cm^2. Нека a = 17cm е работ на коцката. Плоштината на коцката е: $P = 6\cdot a^2$; $P = 6\cdot 17^2$; $P = 1734$cm^2. Бидејќи е 1734<1860, следува дека коцката има помала плоштина од квадарот.

V-2. Збирот на два броја е 200. Ако првиот се намали двапати, а вториот се зголеми за 80, се добиваат два броја чиј збир пак е 200. Кои се тие броеви?

Решение: Нека a и b се бараните броеви. Тогаш $a+b=200$. Ако бројот a се намали двапати се добива $\frac{a}{2}$, па имаме $\frac{a}{2}+b+80=200$. Бидејќи вкупниот збир не е променет следува дека $\frac{a}{2}=80$, односно $a = 160$, $b = 200-160 = 40$.

V-3. Ограден двор со правоаголна форма има должина 124 метри и ширина 85 метри. Во дворот, на растојание 2 метри од оградата, се засадени декоративни дрва на растојание 3 метри едно од друго. Колку дрва се засадени ако во секое теме од правоагхолникот е засадено дрво?



Црт. 1

Решение: Дрвата се засадени по страните на правоаголник со должина 124-2-2 = 20m и ширина 85-22= = 81m. По должина има 120:3 = 40 дрва, по ширина има 81:3 = 27 дрва. Вкупно се засадени $2\cdot 40 + 2\cdot 27 = 134$ дрва.

V-4 За писмена вежба по математика зададени се три задачи. Секој ученик решил барем една задача, а никој не ја решил третата. Првата задача ја решиле 27 ученици, втората 29 ученици, а 20 ученици ги решиле првата и втората задача. Колку ученици ја работеле писмената вежба?

Решение: Бројот на учениците кои ја решиле само првата задача е $27 - 20 = 7$, а само втората задача е $29 - 20 = 9$. Според тоа писмена вежба работеле $7+9+20 = 36$ ученици.

VI-1. Синот и ќерката заедно имале 28 години. Синот имал $\frac{2}{11}$, а ќерката $\frac{5}{11}$ од годините на таткото.

Колку години имал таткото, а колку синот?

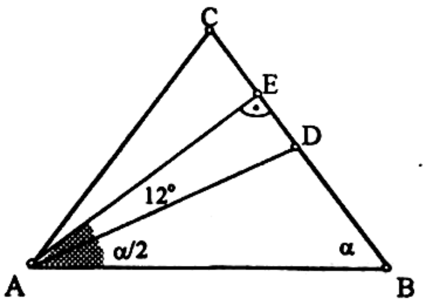
Решение: Нека таткото имал x години. Тогаш, синот имал $\frac{2}{11}x$, а ќерката $\frac{5}{11}x$ години. Имаме: $\frac{2}{11}x + + \frac{5}{11}x = 28$. Следува дека таткото има ($x = 44$) години, а синот има $\frac{2}{11} \cdot 44 = 8$ години.

VI-2. Во бројот 123456789101112...598599600 одреди ја 1203-та цифра.

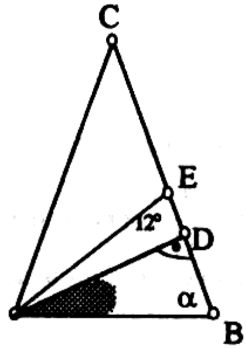
Решение: Девет едноцифрени броеви - 9 цифри; деведесет двоцифрени броеви - $90 \cdot 2 = 180$ цифри.. За трицифрените броеви остануваат $1203 - 180 - 9 = 1014$ цифри . Трицифрени броеви ќе има $1014:3 = 338$. Значи 338-от (трицифрен) број е $99+338 = 437$, т.е. 1203-та цифра е 7 .

VI-3. Во остроаголен рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$), симетралата на аголот при темето A и висината повлечена од истото теме зафаќаат згол од 12°. Пресметај ги аглите на триаголникот ABC.

Решение: Случај 1) Според црт. 2.1: $\angle DAB = \frac{\alpha}{2} - 12°$. Од ΔABD: $\frac{\alpha}{2} - 12° + \alpha = 90°$; $\alpha = 68°$. Третиот агол е $180° - 2 \cdot 68° = 44°$. Случај 2) Според црт. 2.2: $\angle DAB = \frac{\alpha}{2} + 12°$. Од ΔABD: $\frac{\alpha}{2} + 12° + \alpha = 90°$; $\alpha = 52°$.



Црт. 2.2

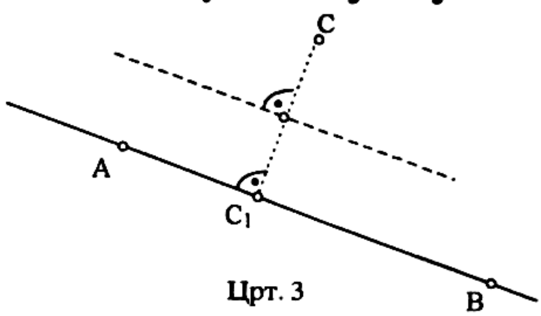


Црт. 2.1

Третиот агол е $180° - 2 \cdot 52° = 76°$. Значи, постојат два триаголници (две решенија) што ги исполнуваат условите на задачата.

VI-4. Дадени се три неколинеарни точки A, B и C. Конструирај права *p* во истата рамнина, така што растојанијата од точките A, B и C до правата *p* да бидат еднакви меѓу себе. Објасни ја конструкцијата.

Решение: Бараната права треба да биде на растојание *d* од правата AB и од точката C(црт. 3). Значи, бараната права е паралелна со правата AB и се наоѓа на растојание *d* од неа. Бидејќи растојанието од точката C до бараната права е исто така еднакво на *d*, следува дека бараната права е симетрала на отсечката CC_1 која е нормална на правата AB и $C_1 \in AB$. Постојат уште два случаи, односно уште две прави со ова својство.



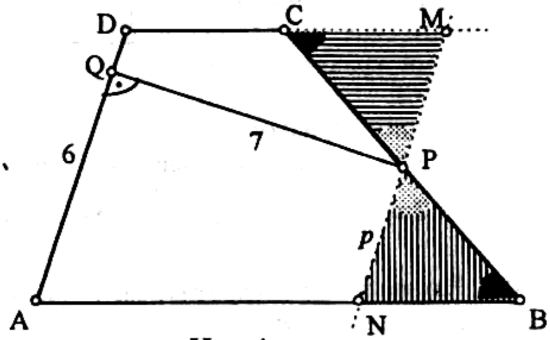
Црт. 3

VII-1. Ако кон производот на два последователни природни броја се додаде поголемиот од нив се добива квадратот на поголемиот број. Докажи!

Решение: Нека x и x +1 се два последователни природни броја. Од условот имаме: $x(x+1)+x+1 = x^2+x+x+1 = x^2 +2x+1 = (x+1)^2$, а ова е квадратот на поголемиот број.

VII-2. Трапезот ABCD има крак $\overline{AD}$ =6 cm. Растојанието од средишната точка P на кракот BC до кракот AD е 7cm. Пресметај ја плоштината на трапезот ABCD.

Решение: Низ средишната точка на кракот BC (црт.4) повлекуваме права $p \| AD$. Правата p ја сече основата AB во точката N, а продолжението на основата CD во точката M.



Црт. 4

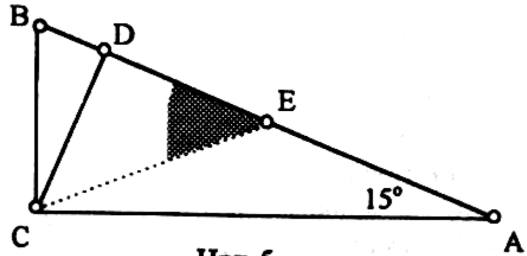
Четириаголникот ANMD е паралелограм со висина $\overline{PQ}$ = 7 cm и основа $\overline{AD}$ = 6 cm. Бидејќи $\Delta NBP \cong \Delta MCP$ (според признакот ACA), следува дека $P_{ABCD} = P_{ANMD} = \overline{AD} \cdot \overline{PQ} = 6\text{ cm} \cdot 7\text{cm} = 42\text{ cm}^2$.

VII-3. Едно парче хартија е исечено на 5 дела. Потоа некои од тие делови пак се исечени на по 5 дела итн. Оваа постапка е повторена конечен број пати. Дали е можно на овој начин да се добијат 1997 парчиња хартија?

Решение: На почетокот има едно парче хартија. Со првото сечење се добиени 5 парчиња, односно бројот на парчињата хартија е зголемен за 4. Ако едно од овие 5 парчиња се исече на 5 дела ќе се добијат вкупно 9 парчиња, односно бројот на парчињата хартија е зголемен пак за 4. Ако оваа постапка продолжи при секое сечење, бројот на парчињата ќе се зголемува за 4. Така се добива низата броеви 1, 5, 9, 13, ...Секој член од оваа низа при делење со 4 дава остаток 1. Бидејќи бројот 1997 при делење со 4 дава остаток 1 ($1997 = 4 \cdot 499+1$), заклучуваме дека е можно да се добијат 1997 парчиња хартија.

VII-4. Ако едниот остар агол во правоаголен триаголник е 15°, тогаш неговата хипотенуза е 4 пати поголема од висината што ѝ одговара. Докажи!

Решение: Познато е дека тежишната линија кон хипотенузата е еднаква на половината од хипотенузата, т.е. $\overline{CE} = \overline{AB} = \overline{BE}$. Надворешниот агол BEC (црт. 5) на рамнокракиот триаголник ACE е 30°. Во правоаголниот триаголник ECD страната CD која е наспроти аголот од 30°, е половина од хипотенузата. Значи $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$, т.е. $\overline{AB} = 4\cdot\overline{CD}$.



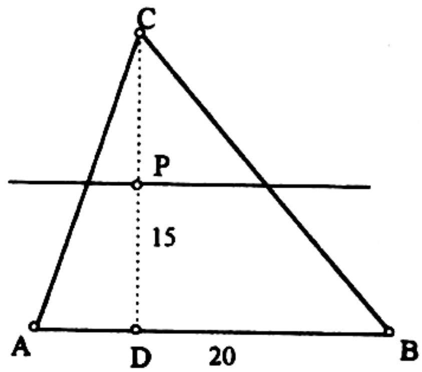
Црт. 5

VIII-1. Разликата на квадратите на кои било два непарни природни броја е делива со 8. Докажи!

Решение: Нека двата непарни природни броја се броевите $2m+1$ и $2n+1$ (каде $m, n \in N$) се двата непарни природни броја. Разликата на овие два броја е $(2m+1)^2 - (2n+1)$. Имаме: $(2m+1)^2 - (2n+1)^2 = 4m^2+4m+1 - 4n^2 - 4n - 1 = 4m(m+1) - 4n(n+1)$. Секој производ во горната разлика е делив со 8, бидејќи содржи множител 4 како и производ на последователни природни броеви.

VIII-2. Даден е триаголник со основа 20 cm и висина 15 cm. Со права паралелна со основата на триаголникот е отсечен триаголник со плоштина 24 cm². Одреди на кое растојание се наоѓа правата од основата.

Решение: За односот на плоштините P и P_1 на слични триаголници со висини h и h_1 имаме: $P:P_1 = h^2 : h_1^2$, или според црт.6: $P:P_1 = \overline{DC}^2 : \overline{PC}^2$.



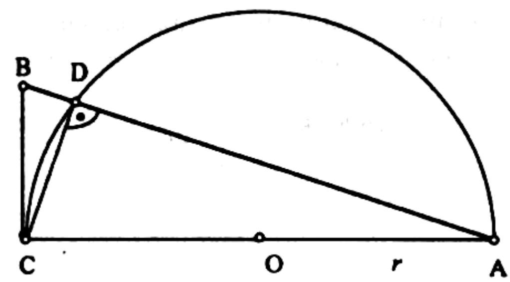
Црт. 6

$\overline{PC}^2 = \frac{\overline{DC}^2 \cdot P_1}{P}$ или $\overline{PC}^2 = \frac{15^2 \cdot 24}{150}$; $\overline{PC} = 6$ cm. Следи $\overline{DP} = 15\text{-}6 = 9$ cm.
Правата е на растојание 9 cm од основата.

VIII-3. Даден е правоаголен триаголник ABC ($\angle C=90°$), со катета $\overline{BC}=30$ cm. Над катетата AC, земена како дијаметар, е опишана полукружница, која хипотенузата ја сече во точката D. Ако тетивата $\overline{CD}=24$ cm, пресметај ја должината на полукружницата.

Решение: Триаголникот CAD (црт. 7) е правоаголен (според Талесовата теорема). Во ΔBDC,
$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{30^2-24^2}=$
$=18$ cm

$\Delta BCD \sim \Delta CAD$, бидејќи $\angle BCD=$ $=\angle CAD$ - како агли со заемно нормални краци. Следува дека $\overline{BC}:\overline{BD}=\overline{CA}:\overline{CD}$ или $30:18 =$ $=\overline{CA}:24$, па $\overline{CA}=2r=40$, $r=20$cm. $L=r\pi=20\pi\approx 62{,}8$ cm.



Црт. 7

VIII-4. Тројца работници, A, B и C, заедно, за 1 час можат да завршат една работа. Познато е дека секој од нив истата работа може да ја заврши за цел број часови. Притоа, работникот B работи побрзо од работникот A, а поспоро од работникот C. За колку часа истата работа може да ја заврши секој од нив сам?

Решение: Нека работникот A сам ја завршува работата за a часа, работникот B, за b часа, работникот C за c часа. За 1 час работникот A сам завршува $\frac{1}{a}$ од работата, работникот B, $\frac{1}{b}$, а работникот C, $\frac{1}{c}$. Од условот имаме: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ ...(*), при што $1<a<b<c$. Равенството (*) е исполнето само за $a=2$, $b=3$, $c=6$.