Милан Петковић (Краљево)
Војислав Андрић (Ваљево)

КВАДРАТНИ ТРИНОМ x^2+x+1

У млађим разредима упознали сте изразе са променљивом и одређивање бројевне вредности израза. У седмом разреду научили сте све о алгебарским рационалним изразима и операцијама са њима, растављање полинома на чиниоце и решавање неких једноставних квадратних једначина. Циљ овог текста је да наше читаоце упозна са квадратним триномом x^2+x+1 и његовим специфичним особинама.

Теорема 1. Ако је x реалан број, онда је $x^2+x+1>0$.

Доказ 1. Како је $x^2+x+1 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ и како је квадрат сваког реалног броја ненегативан, то је $x^2+x+1 \geq \frac{3}{4} > 0$.

Доказ 2. Ако је $x<-1$, онда је $x<0$ и $x+1<0$, па је $x(x+1)>0$. Следи да је и $x(x+1)+1 = x^2+x+1>0$. Ако је $x=-1$, онда је $x^2+x+1=1>0$. Ако је $-1<x<0$, онда је $x+1>0$ и $x^2>0$, па је $x^2+x+1>0$. Ако је $x=0$, онда је $x^2+x+1=1>0$. Ако је $x>0$, онда је $x^2>0$, $x>0$ и $1>0$, па је и $x^2+x+1>0$.

Теорема 2. Једначина $x^2+x+1=0$ нема решења у скупу реалних бројева.

Доказ. Из претходне теореме је $x^2+x+1>0$ за свако реално x. Према томе, не постоји реалан број x такав да је $x^2+x+1=0$.

Теорема 3. Ако је $x^2+x+1=0$, онда x није реалан број.

Доказ. Непосредно следи из претходне теореме.

Теорема 4. Ако је $x^2+x+1=0$, онда је $x^3=1$.

Доказ. Ако је $x^2+x+1=0$, онда је $x\neq 1$, јер је $1^3+1+1=3\neq 0$. Како је $x-1\neq 0$, то је $(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)\cdot 0=0$, па је $x^3+x^2+x-x^2-x-1=0$, тј. $x^3-1=0$ или $x^3=1$.

Дакле, ако је $x^2+x+1=0$, онда је x број који није реалан (у средњој школи ћете се упознати са таквим бројевима који се зову комплексни), а има особину да је $x^3=1$.

Наведене особине квадратног тринома $x^2 + x + 1$ искористићемо за решавање следећих проблема.

Пример 1. Решити једначину $(3x-9)(x^2+x+1) = 0$ у скупу реалних бројева.

Производ $(3x-9)(x^2+x+1)$ је једнак нули ако је бар један од чинилаца $3x-9$ или x^2+x+1 једнак нули. Како је $x^2+x+1 > 0$, то мора бити $3x-9=0$, тј. $x=3$.

Пример 2. Одредити све реалне бројеве x тако да је $\dfrac{x^2+x+1}{2x-4} < 0$.

Количник израза x^2+x+1 и $2x-4$ је негативан ако су изрази различитог знака. Како је $x^2+x+1>0$, то мора бити $2x-4<0$, па је $x<2$, тј. дата неједнакост је тачна за све реалне вредности x које су мање од 2.

Пример 3. Решити једначину $x^3-1=0$ у скупу реалних бројева.

Како је $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ и како је $x^2+x+1\neq 0$, то је $(x-1)(x^2+x+1)=0$ само ако је $x-1=0$, тј. $x=1$ је једино реално решење једначине.

Пример 4. Доказати да за сваки реалан број x важи неједнакост $2x^2+3x+2>0$.

Како је $x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$ и $x^2+x+1>0$, то се сабирањем ових двеју неједнакости добија $x^2+2x+1+x^2+x+1=2x^2+3x+2>0$.

Пример 5. Ако је x реалан број онда је $x^2-x+1>0$.

Израз $x^2-x+1=x^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$, па је $x^2-x+1\geq\dfrac{3}{4}>0$.

Пример 6. Ако је $x^2-x+1=0$, онда је $x^3+1=0$. Доказати.

Ако је $x=-1$, онда је $x^2-x+1=1+1+1=3\neq 0$. Дакле, ако је $x+1=0$, онда је $x^2-x+1\neq 0$. Значи да је $(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)\cdot 0=0$. Како је $(x+1)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x+x^2-x+1=0$, то је $x^3+1=0$.

Пример 7. Ако је $x+\dfrac{1}{x}=-1$, колико је:

(а) $x^3 + \frac{1}{x^3}$, (б) $x^{1999} + \frac{1}{x^{1999}}$?

Ако је $x + \frac{1}{x} = -1$, онда је $x \neq 0$ (да би постојао $\frac{1}{x}$), па је $x^2 + 1 = -x$, тј. $x^2 + x + 1 = 0$. Тада је $x^3 = 1$ (Теорема 4.), па је $x^3 + \frac{1}{x^3} = 1 + 1 = 2$. Слично, $x^{1999} + \frac{1}{x^{1999}} = x(x^3)^{666} + \frac{1}{x(x^3)^{666}} = x \cdot 1^{666} + \frac{1}{x \cdot 1^{666}} = x + \frac{1}{x} = -1$.

Нашим младим читаоцима препоручујемо да, користећи доказане теореме и претходне примере, самостално реше следеће проблеме.

ЗАДАЦИ:

1. У скупу реалних бројева решити једначине:

   (а) $(x^2 - 2x)(x^2 + x + 1) = 0$;

   (б) $(x^2 - x + 1)(\frac{x}{2} - 3) = 0$;

   (в) $(x^2 + x + 1)^{1999}(x^2 - 9) = 0$;

   (г) $x^3 + 1 = 0$;

   (д) $\frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 3x} = 0$; (ђ) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} = 0$.

2. Одредити решења неједначина:

   (а) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$;

   (б) $\frac{x^2 - x + 1}{\frac{x}{2} - 4} > 0$; (в) $x^3 + 1 > 0$;

   (г) $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} > 1$.

3. Доказати да за свако реално x важе неједнакости:

   (а) $2x^2 - 5x + 10 > 0$; (б) $2x^2 + x + 1 > 0$.

4. Ако је $x + \frac{1}{x} = 1$, израчунати

   (а) $x^2 + \frac{1}{x^2}$; (б) $x^3 + \frac{1}{x^3}$; (в) $x^{1999} + \frac{1}{x^{1999}}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија