Сојузен натпревар 1973

I година

1. Во едно друштво на математичари секој од нив се занимава барем со една од следниве области на математиката: алгебра, анализа, геометрија или логика. Тој што се занимава со алгебра или логика, се занимава и со анализа. Тој што се занимава со геометрија се занимава и со логика. Тој што се занимава со анализа и геометрија, се занимава и со алгебра. Со која од овие области се занимаваат најмногу, а со која најмалку математичари?

Решение. Нека S_1, S_2, S_3 и S_4 се редоследно математичарите кои се занимаваат со алгебра, анализа, геометрија и логика. Од условот на задачата следува

$$S_1 \cup S_4 \subset S_2,\ S_3 \subset S_4,\ S_2 \cap S_3 \subset S_1.$$

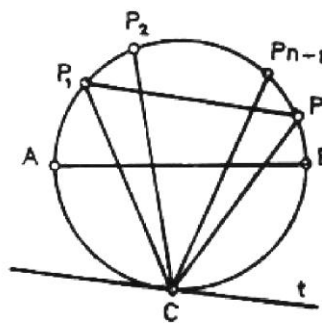
Од првиот и вториот услов добиваме

$$S_3 \subset S_2 \text{ и } S_1 \cup S_3 \cup S_4 \subset S_2,$$

т.е. најмногу математичари се занимаваат со анализа. Понатаму, $S_2 \cap S_3 = S_3$, па од третиот услов следува $S_3 \subset S_1$. Конечно, добиваме $S_3 \subset S_1 \cap S_2 \cap S_4$, т.е. најмалку математичари се занимаваат со геометрија.

2. Дадена се кружница k и нејзин дијаметар AB. На едната полукружница се избрани n точки $P_1, P_2, ..., P_n$ такви што P_1 е меѓу A и P_2, P_2 е меѓу P_1 и P_3,..., P_n е меѓу P_{n-1} и B. На другата полукружница определи точка C таква што збирот на плоштините на триаголниците $CP_1P_2, CP_2P_3, ..., CP_{n-1}P_n$ ќе биде најмал.

Решение. Збирот на плоштините на триаголниците $CP_1P_2, CP_2P_3, ..., CP_{n-1}P_n$ е еднаков на плоштината на многуаголникот $CP_1P_2...P_n$, т.е. на збирот на плоштината на $n-$аголникот $P_1P_2,...P_n$ и триаголникот CP_1P_n, па затоа има максимална вредност ако плоштината на триаголникот CP_1P_n е максимална. Нека t е тангентата на дадената кружница која е паралелна со правата P_1P_n и која се наоѓа на онаа страна од P_1P_n на која не е точката P_2 (цртеж десно). Допирната точка на оваа тангента и кружницата е бараната точка C, бидејќи од сите триаголници со основа AB и теме на лакот AB кој не ја содржи точката P_2 најголема висина има триаголникот ABC.



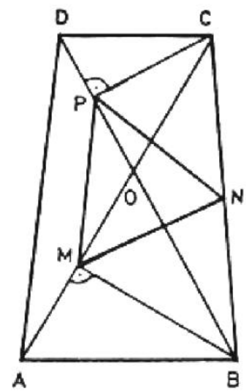
3. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\sqrt{\underbrace{44...4}_{2n}+\underbrace{11...1}_{n+1}-\underbrace{66...6}_{n}}\,.$$

Решение. Имаме:

$$\sqrt{\underbrace{44...4}_{2n}+\underbrace{11...1}_{n+1}-\underbrace{66...6}_{n}}=\sqrt{4\cdot\tfrac{10^{2n}-1}{9}+\tfrac{10^{n+1}-1}{9}-6\cdot\tfrac{10^{n}-1}{9}}$$
$$=\tfrac{1}{3}\sqrt{4\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^{n}+1}$$
$$=\tfrac{1}{3}\sqrt{(2\cdot 10^{n}+1)^2}=\tfrac{1}{3}(2\cdot 10^{n}+1)$$
$$=\tfrac{1}{3}\cdot\underbrace{200...01}_{n+1}=\underbrace{66...67}_{n}.$$

4. Дијагоналите AC и BD на рамнокракиот трапез $ABCD$ со основа AB се сечат во точка O при што $\measuredangle AOB=60^\circ$. Докажи дека средините на отсечките OA, OD, BC се темиња на рамностран триаголник.

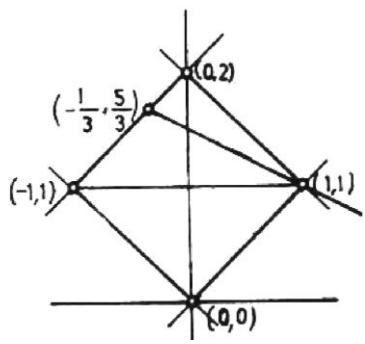


Решение. Триаголниците ABO и CDO се рамнокраки и како аголот во темето O им е еднаков на 60°, овие триаголници се рамнострани (цртеж десно). Од ова и од условот дека M и P се соодветно средини на отсечките AO и DO следува дека $BM\perp AO$ и $CP\perp DO$. Според тоа, триаголниците BMC и BPC се правоаголни со прави агли во темињата M и P. Центарот на опишаната кружница околу овие триаголници е средината на хипотенузата BC, односно точката N. Од последното, условот $AD=BC$ и фактот дека MP е средна линија на триаголникот ADO добиваме
$MP=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=NC=NP=NM$, т.е. $MN=NP=PM$.

5. а) Реши го системот равенки

$$|x|+|y-1|=1,\;\; x+2y=3\,.$$

б) Решението прикажи го графички во рамнина на правоаголен координатен систем.



Решение. Ќе ги разгледаме следниве четири системи:

1) $x\geq 0, y\geq 1, x+y=2, x+2y=3$,

2) $x\geq 0, y<1, x-y=0, x+2y=3$,

3) $x<0, y\geq 1, y-x=2, x+2y=3$,

4) $x<0, y<1, x+y=0, x+2y=3$.

Системот 1) има решение $(1,1)$, системите 2) и

3) немаат решение, а системот 4) има решение $(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$. Решенијата на системот се прикажани на горниот цртеж. Имено, множеството точки (x, y) за кои важи $|x|+|y-1|=1$ е границата на квадратот со темиња $(0,0), (1,1), (0,2), (-1,1)$. Правата $x+2y=3$ ја сече оваа граница во точките $(1,1)$ и $(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$.

II година

1. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{2x-a}=x-b,$$

каде a и b се реални броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на системот

$$2x-a=(x-b)^2, \;\; x\ge b, \;\; x\ge \frac{a}{2}.$$

Равенката $2x-a=(x-b)^2$ може да се запише во облик

$$x^2-2(b+1)x+a+b^2=0$$

и има решенија $x_1=b+1-\sqrt{2b-a+1}, x_2=b+1+\sqrt{2b-a+1}$.

а) Ако $\frac{a}{2}<b$, тогаш $\frac{a}{2}<x_1<b<x_2$, па само x_2 е решение на дадената равенка.

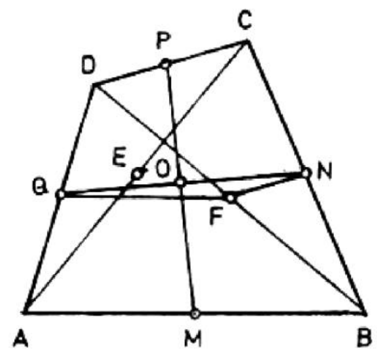
б) Ако $2b\le a<2b+1$, тогаш $b\le\frac{a}{2}\le x_1<x_2$, па x_1 и x_2 се решенија на дадената равенка.

в) Ако $a=2b+1$, тогаш $b<\frac{a}{2}<x_1=x_2$, па затоа бројот $b+1$ е единствено решение на дадената равенка

г) Ако $a>2b+1$, тогаш x_1 и x_2 не се реални броеви, т.е. дадената равенка нема реални решенија.

2. Ако збирот на отсечките определени со средишните парови на спротивните страни на четириаголникот е еднаков на неговиот полупериметар, тогаш тој четириаголник е паралелограм. Докажи!

Решение. Нека M, N, P, Q се редоследно средините на страните AB, BC, CD, DA на четириаголникот $ABCD$, E и F се соодветно средините на дијагоналите AC и BD и O е пресекот на отсечките MP и NQ (цртеж десно). Доволно е да докажеме дека точките E и F се совпаѓаат.



Бидејќи MF, NF, PF, QF се средни линии на триаголниците ABD и BCD, важи

$$MF=\frac{AD}{2},\ NF=\frac{DC}{2},\ PF=\frac{BC}{2},\ QF=\frac{AB}{2},$$

па затоа

$$MF+PF+NF+QF=\tfrac{1}{2}(AB+BC+CD+DA).$$

Понатаму, според условот на задачата и

$$MP+QN=\tfrac{1}{2}(AB+BC+CD+DA),$$

добиваме

$$MF+PF+NF+QF=MP+QN. \tag{1}$$

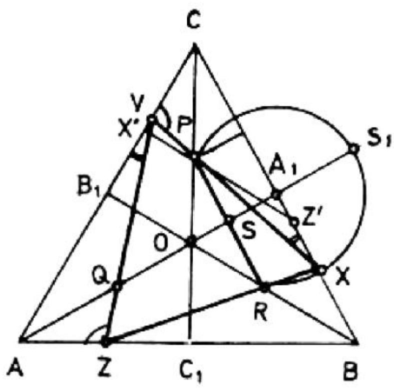
Ако точката F не припаѓа барем на една од отсечките MP и QN, на пример $F\notin MP$, тогаш $MF+PF>MP$ и $NF+QF\geq NQ$, па затоа

$$MF+PF+NF+QF>MP+QN,$$

што противречи на (1). Според тоа, $F\in MP$ и $F\in NQ$, па затоа $F\equiv O$. Аналогно се докажува дека $E\equiv O$. Конечно, $F\equiv O\equiv E$.

3. Даден е рамностран триаголник ABC со страна a, со центар O и точка P која припаѓа на отсечката OC. Конструирај рамностран триаголник XYZ вписан во триаголникот ABC, така што точките X,Y,Z припаѓаат редоследно на страните BC,CA,AB и страната XY ја содржи точката P. Кога задачата има решение?

Решение. *Анализа*. Нека XYZ е бараниот триаголник (цртеж десно). Тогаш $XY=YZ$,



$$\measuredangle YXC=180^\circ-\measuredangle YCX-\measuredangle XYC$$
$$=180^\circ-60^\circ-\measuredangle XYC$$
$$=180^\circ-\measuredangle ZYX-\measuredangle XYC=\measuredangle ZYA,$$
$$\measuredangle XYC=180^\circ-60^\circ-\measuredangle YXC$$
$$=180^\circ-60^\circ-\measuredangle ZYA=\measuredangle YZA,$$

па затоа триаголниците CXY и AYZ се складни. Аналогно се докажува дека секој од овие триаголници е складен со триаголникот BZX. Понатаму имаме $XA_1=YB_1=ZC_1,\ OA_1=OB_1=OC_1$, па затоа правоаголните триаголници OA_1X, OB_1Y, OC_1Z се складни. Затоа $OX=OY=OZ$, т.е. точката O е центар на рамностраниот триаголник XYZ. Нека $Q=YZ\cap AO,\ R=ZX\cap BO$.

Ротацијата околу точката O за агол 120° (односно -120°) ја пресликува точката P во точката во точката R (односно во точката Q). Затоа $OP=OQ=OR$.

Конструкција. На отсечката OB конструираме точка R така што важи $OR=OP$. Потоа на онаа страна на отсечката PR на која е страната BC конструираме геометриско место на точки l од кои отсечката PR се гледа под агол

60°. Тоа е лак од кружница. Нека X е пресечната точка на лакот l и отсечката BC. На крајот се конструираат точки Y и Z редоследно како пресеци на правите XP и AC, односно XR и AB. Триаголникот XYZ е бараниот триаголник.

Доказ. По конструкција $P \in XY$ и $\measuredangle ZXY = 60^\circ$. За да докажеме дека триаголникот XYZ е рамностран доволно е да докажеме дека $XZ = XY$. Аналогно, како на почетокот, добиваме

$$\measuredangle YXC = \measuredangle XZB,\ \measuredangle XYC = \measuredangle ZXB.$$

Ротацијата за 120° околу точката O ги пресликува точките R, B, Z, X редоследно во точките $P, C, Z' \in BC, X' \in CA$. Тогаш $\triangle Z'CX' \cong \triangle ZBX$ и $\triangle Z'CX' \cong \triangle XCY$, па следува дека $\triangle Z'CX' \cong \triangle XCY$ и оттука

$$CX = CZ', CY = CX'.$$

Бидејќи $X', Y \in CA$ и $Z', X \in BC$, добиваме $X = Z'$ и $Y = X'$. Конечно,

$$XZ = X'Z' = YX.$$

Дискусија. Бидејќи лакот l и правата BC може да имаат две, една или ниедна пресечна тока, задачата има две, едно или ниедно решение. Нека $OP = x$, $AB = a$, $S = PR \cap AA_1$ и $S_1 = l \cap AA_1$. Тогаш

$$PS = \frac{x\sqrt{3}}{2}, OS = \frac{x}{2}, SA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{x}{2}, SS_1 = PS\sqrt{3} = \frac{3x}{2}.$$

Задачата има решение ако и само ако $SS_1 \geq SA_1$, т.е. ако и само ако

$$OP = x \geq \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} OC.$$

4. Докажи го неравенството

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}.$$

Решение. Нека $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{120}{121}$ и $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{119}{120}$. Бидејќи

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \frac{6}{7} > \frac{5}{6}, \ldots, \frac{120}{121} > \frac{119}{120},$$

добиваме дека $x > y$ и $x^2 > xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{119}{120} \cdot \frac{120}{121} = \frac{1}{121}$, па затоа $x > \frac{1}{11}$.

III година

1. Во внатрешноста на тетраедарот $ABCD$ е дадена точка O. Докажи дека збирот на аглите под кои од точката O се гледаат рабовите на тетраедарот е поголем од 3π.

Решение. Ги воведуваме ознаките:

$O_1 = DO \cap ABC, A_1 = AO_1 \cap BC, B_1 = BO_1 \cap CA, C_1 = CO_1 \cap AB,$

$\alpha = \measuredangle AOD, \beta = \measuredangle BOD, \gamma = \measuredangle COD, \alpha_1 = \measuredangle BOC, \beta_1 = \measuredangle COA, \gamma_1 = \measuredangle AOB,$

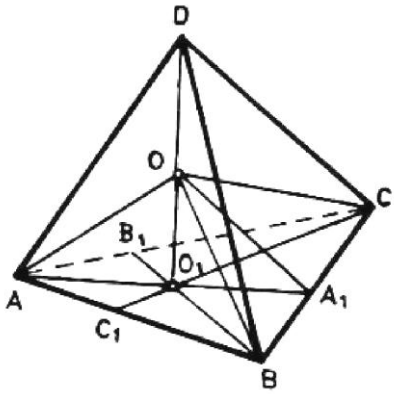
$\alpha_2 = \measuredangle AOO_1, \beta_2 = \measuredangle BOO_1, \gamma_2 = \measuredangle COO_1,$

(цртеж десно). Тогаш

$$\alpha+\alpha_2=\pi,\ \beta+\beta_2=\pi,\ \gamma+\gamma_2=\pi\ ,$$

па затоа

$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=3\pi\,. \qquad (1)$$



Понатаму,

$$\begin{aligned}\alpha_1+\beta_1&=\measuredangle BOC+\measuredangle COA\\ &=\measuredangle BOA_1+\measuredangle A_1OC+\measuredangle COA\\ &>\measuredangle BOA_1+\measuredangle AOA_1\\ &=\measuredangle BOA+\measuredangle A_1OO_1+\measuredangle AOO_1\\ &>\measuredangle BOO_1+\measuredangle AOO_1=\alpha_2+\beta_2\end{aligned}$$

и аналогно

$$\beta_1+\gamma_1>\beta_2+\gamma_2,\ \alpha_1+\gamma_1>\alpha_2+\gamma_2\ ,$$

па ако ги собереме овие неравенства добиваме

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1>\alpha_2+\beta_2+\gamma_2\,. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме

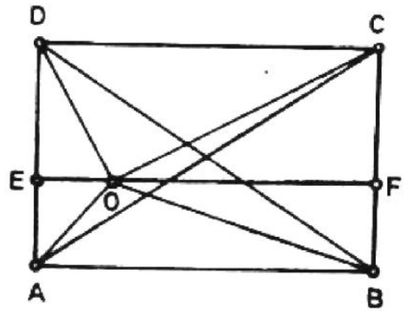
$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=3\pi\ ,$$

што и требаше да се докаже.

2. Во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ е дадена произволна точка O. Докажи дека

$$\frac{P_{OAC}}{P_{OBD}}=\frac{\operatorname{tg}\measuredangle AOC}{\operatorname{tg}\measuredangle BOD}\,.$$

Решение. Од формулата за плоштина на триаголник и косинусната теорема следува



$$\begin{aligned}P_{BOD}&=\tfrac{1}{2}OB\cdot OD\sin\measuredangle BOD\\ &=\tfrac{1}{4}(OB^2+OD^2-BD^2)\operatorname{tg}\measuredangle BOD\end{aligned}$$

и аналогно

$$P_{AOC}=\tfrac{1}{4}(OA^2+OC^2-AC^2)\operatorname{tg}\measuredangle AOC\,,$$

(цртеж десно). Бидејќи $AC=BD$, доволно е уште да се докаже дека $OB^2+OD^2=OA^2+OC^2$. Нека E и F се подножјата на нормалите од точката O на правите AD и BC. Тогаш $EF\,||\,AB$ и $AE=F$, па добиваме

$$\begin{aligned}OB^2+OD^2&=OD^2+BF^2+OE^2+DE^2=OF^2+AE^2+OE^2+CF^2\\ &=(OE^2+AE^2)+(OF^2+CF^2)=OA^2+OC^2.\end{aligned}$$

3. Реши го системот равенки

$$x:y:z=(y-z):(z-x):(x-y),$$

каде x,y,z се различни комплексни броеви.

Решение. Нека

$$\frac{x}{y-z}=\frac{y}{z-x}=\frac{z}{x-y}=k\ .$$

Тогаш важи $k\neq 0, xyz\neq 0$ и $x=k(y-z), y=k(z-x), z=k(x-y)$. Од равенките $y=k(z-x), z=k(x-y)$ следува

$$y=\frac{k^2-k}{k^2+1}x,\ \ z=\frac{k^2+k}{k^2+1}x,$$

па со замена во $x=k(y-z)$ добиваме $(3k^2+1)x=0$. Но, $x\neq 0$, па од последната равенка следува $3k^2+1=0$, т.е. $k=\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$. За $k=-\frac{i}{\sqrt{3}}$ добиваме $y=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x$, $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x$, а за $k=\frac{i}{\sqrt{3}}$ добиваме $y=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x$, $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x$. Лесно се проверува дека тројките

$$(x,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x,-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x)\ \text{ и }\ (x,-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x),$$

каде x е произволен комплексен број различен од нула, се решенија на дадениот систем.

4. Нека $S(a)$ е збирот на цифрите на бројот a запишан во декаден броен систем, а m е даден природен број. Докажи дека разликата $S(a^m)-S^m(a)$ е делива со 9 за секој природен број a.

Решение. Прво да забележиме дека, ако $n=\overline{c_nc_{n-1}...c_1c_0}=\sum\limits_{k=0}^{n}10^k c_k$, тогаш

$$n-S(n)=\sum_{k=0}^{n}(10^k-1)c_k=9\sum_{k=0}^{n}c_k\cdot\underbrace{11...11}_{k},$$

т.е. за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $9\,|\,n-S(n)$.

Сега, од равенството

$$\begin{aligned}S(a^m)-S^m(a)&=(S(a^m)-a^m)+a^m-S^m(a)\\&=(S(a^m)-a^m)+(a-S(a))(a^{m-1}+a^{m-2}S(a)+...+S^{m-1}(a))\end{aligned}$$

и докажаното тврдење следува дека за секој $a\in\mathbb{N}$ важи $9\,|\,S(a^m)-S^m(a)$.

IV година

1. Дадена е строго растечка низа природни броеви

$$a_0=1,a_1,a_2,... \tag{1}$$

таква што за секој природен број n важи

$$1+\sum_{j=0}^{n-1} a_j \geq a_n \,. \tag{2}$$

Докажи дека секој природен број N може да се прикаже како збир на неколку различни членови на низата (1). Докажи дека овој приказ е еднозначен ако и само ако за секој природен број n во (2) важи знак за равенство.

Решение. Нека $A_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$. Со индукција по n ќе го докажеме следново тврдење: Секој природен број M кој не е поголем од A_n може да се запише како збир на неколку различни елементи од множеството $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$.

Од $a_0 = 1$ следува дека тврдењето е точно за $n = 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број n. Нека $A_n < M \leq A_{n+1}$ и $d = A_{n+1} - M$. Ако $d = 0$, тогаш $M = A_{n+1} = a_0 + a_1 + ... + a_{n+1}$. Ако $d > 0$, тогаш од $M > A_n$ и условот (2) следува $d < a_{n+1} \leq 1 + A_n$, т.е. $d \leq A_n$. Од индуктивната претпоставка следува дека постојат броеви $j_1, j_2, ..., j_k$ такви што важи

$$0 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \,,\; d = a_{j_1} + a_{j_2} + ... + a_{j_k} \,,$$

од каде следува

$$M = A_{n+1} - d = a_0 + a_1 + ... + a_{n+1} - (a_{j_1} + a_{j_2} + ... + a_{j_k}) \,.$$

Според тоа, и бројот M може да се претстави како збир на неколку елементи од множеството $\{a_0, a_1, ..., a_{n+1}\}$, т.е. тврдењето важи и за $n+1$.

Да забележиме дека ако за некој n важи $1 + A_{n-1} > a_n$, тогаш бројот a_n може да се прикаже како збир на некои од броевите $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, а исто така и како $a_n = a_n$. Според тоа, условот

$$a_0 = 1,\, 1 + A_{n-1} = a_n \,, \text{ за секој } n \in \{1, 2, 3, ...\} \tag{3}$$

е потребен за секој природен број на единствен начин да може да се прикаже како збир на неколку различни членови на низата $\{a_n\}$.

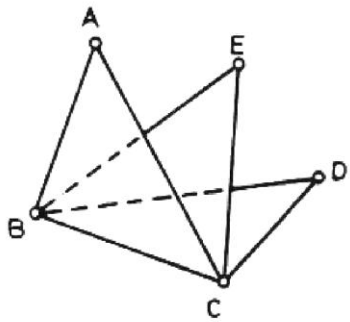
Ако важи условот (3), тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_n = 1 + A_{n-1} = 1 + A_{n-1} + a_{n-1} = 2a_{n-1} \,,$$

па од $a_0 = 1$ следува $a_n = 2^n$. Според тоа, секој природен број на единствен начин може да се прикаже како збир на членови на низата 1, 2, 4, 8, 16, ...

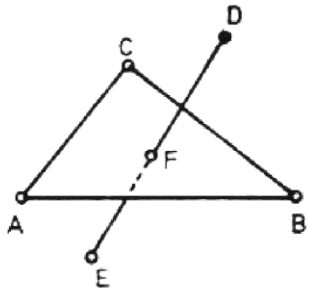
2. Во просторот се дадени пет точки такви што никои четири не се компланарни. Докажи дека од овие пет точки секогаш може да се изберат две точки такви што правата определена со тие две точки ја сече рамнината определена со другите три точки во некоја точка која се наоѓа во триаголникот чии темиња се тие три точки.

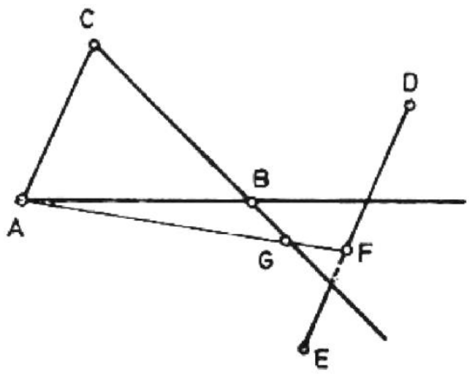
Решение. Нека A, B, C, D, E се точки од просторот такви што никои четири од нив се компланарни. Ќе докажеме дека меѓу овие точки постојат две, такви што тие се наоѓаат на различни страни на рамнината определена со другите три точки. Ако точките A и E се наоѓаат на иста страна од рамнината BCD, а точките D и E од иста страна на рамнината ABC, тогаш точката E се наоѓа во диедарот чии ѕидови се полурамнини со гранична права BC кои ги содржат точките A и D. Тоа значи дека точките A и D се на различни страни на рамнината BCE, цртеж десно.



Нека претпосатвиме дека точките D и E се на различни страни на рамнината α определена со точките A, B и C. Нека F е пресекот на правата DE со рамнината α. Ќе ги разгледаме следниве случаи:

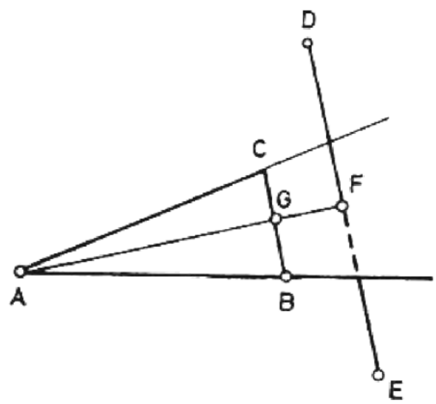
а) Точката F припаѓа на триаголникот ABC (цртеж десно). Во овој случај доказот на тврдењето на задачата е завршен.





б) Точката F припаѓа на аголот кој е накрсен на некој од аглите на триаголникот ABC, на пример на аголот ABC, цртеж лево. Нека G е пресекот на правите AF и BC. Тогаш точката G (пресекот на правата BC и рамнината определена со точките A, D и E) се наоѓа меѓу точките A и F, па затоа припаѓа на триаголникот ADE.

в) Точката E припаѓа на некој од аглите на триаголникот ABC (да кажеме на аголот BAC), но е надвор од триаголникот. Нека G е пресекот на правите BC и AF (цртеж десно). Тогаш точката G, која е пресек на правата BC и рамнината определена со точките A, D, E, се наоѓа меѓу точките A и F, па затоа припаѓа на триаголникот ADE.



3. Нека $\{x, y, z, t\} = \{12, 14, 37, 65\}$. Определи ги броевите x, y, z, t ако важи

$$xy - xz + yt = 182.$$

Решение. Со непосредна проверка (24 можности) се добива дека единствено решение е $x=12, y=37, z=65, t=14$. На читателот му препуштаме самостојно да ја упрости постапката, на пример, разгледувајќи остатоци при делење со 2 и 3 на бројот 182 и производите по два од броевите 12, 14, 37 и 65.

4. Определи го множеството точки z во комплексната рамнина за кои постои реален број c таков што $z=\frac{c-i}{2c-i}$.

Решение. Нека $z=x+iy$. Имаме:

$$c=\frac{zi-i}{2z-1}=\frac{-y+(x-1)i}{2x-1+2yi}\cdot\frac{2x-1-2yi}{2x-1-2yi}=\frac{(1-2x)y+(x-1)2y+[(x-1)(2x-1)+2y^2]i}{(2x-1)^2+4y^2}.$$

Бараното множество е

$$\begin{aligned}S&=\{z=x+iy\mid(x-1)(2x-1)+2y^2=0,(x,y)\neq(\tfrac{1}{2},0)\}\\&=\{z=x+iy\mid(x-\tfrac{3}{4})^2+y^2=\tfrac{1}{16},(x,y)\neq(\tfrac{1}{2},0)\}.\end{aligned}$$

Мала олимпијада

1. Должините на страните на еден правоаголник се непарни броеви. Докажи дека во овој правоаголник не постои точка чие растојание до секое теме е еднакво на природен број.

Решение. Нека непарните броеви a и b се должините на страните на дадениот правоаголник. Да претпоставиме дека во внатрешноста на правоаголникот постои точка T за која растојанието до секое теме на правоаголникот е еднакво на цел број. Нека x_1 и x_2 се растојанијата од точката T до страните со должина b, а y_1 и y_2 се растојанијата од точката T до страните со должини a. Тогаш $a=x_1+x_2$, $b=y_1+y_2$, а броевите

$$d_{ij}=\sqrt{x_i^2+y_j^2},\ i,j\in\{1,2\}$$

се цели. Ги воведуваме ознаките: $a_i=abx_i, b_j=aby_j$, каде $i,j\in\{1,2\}$ и

$$A_1=a_1-a_2, A_2=a_1+a_2, B_1=b_1-b_2, B_2=b_1+b_2.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}A_1&=ab(x_1-x_2)=b(x_1^2-x_2^2)=b((x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_1^2)),\\A_2&=ab(x_1+x_2)=a^2b,\\B_1&=ab(y_1-y_2)=a(y_1^2-y_2^2)=a((x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)),\\B_2&=ab(y_1+y_2)=ab^2,\end{aligned}$$

па затоа A_1 и B_1 се цели, а A_2 и B_2 се непарни броеви.

Да претпоставиме дека секој од броевите a_1, a_2, b_1, b_2 е цел. Бидејќи A_2 и B_2 се непарни броеви, добиваме дека точно еден од броевите a_1, a_2 и точно еден од броевите b_1, b_2 е непарен. Нека, на пример a_1 и b_1 се непарни броеви. Тогаш

$$a_1^2 \equiv 1(\text{mod}\,4),\ \ b_1^2 \equiv 1(\text{mod}\,4),$$
$$a_1^2 + b_1^2 \equiv a^2b^2(x_1^2 + y_1^2) = (d_{ij}ab)^2 \equiv 2(\text{mod}\,4),$$

што е противречност. Според тоа, барем еден од броевите a_1, a_2, b_1, b_2 не е цел. Бидејќи

$$2a_1 = A_1 + A_2,\ 2a_2 = A_2 - A_1,\ 2b_1 = B_1 + B_2,\ 2b_2 = B_2 - B_1,$$

заклучуваме дека барем еден од броевите $2a_1, 2a_2, 2b_1, 2b_2$ е непарен. Нека, на пример, $2a_1$ е непарен број. Тогаш

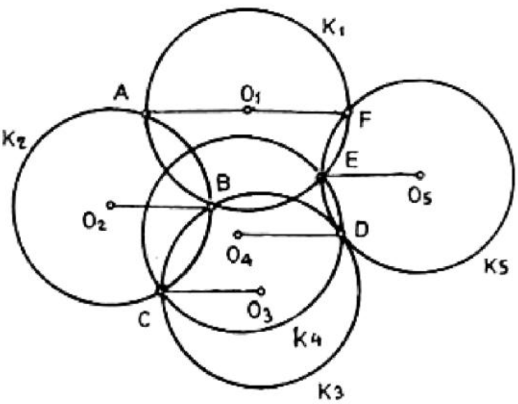
$$(2a_1)^2 + (2b_1)^2 = 4(a_1^2 + b_1^2) = 4a^2b^2(x_1^2 + y_1^2) = 4a^2b^2d_{11}^2,$$

т.е.

$$(2b_1)^2 = 4a^2b^2d_{11}^2 - (2a_1)^2 \equiv -1(\text{mod}\,4),$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

2. Со помош на даден диск, на пример монета, е нацртана кружница и на неа е избрана точка A. Користејќи го само истиот тој диск конструирај точка B на кружницата k таква што AB е дијаметар на кружницата. (Дозволен е избор на произволна точка на некоја од нацртаните кружници, а со помош на дискот може да се конструира било која од две кружници која содржат две точки кои се на растојание помало од дијаметарот на кружницата.)



Решение. Нека k_1 е дадената кружница со центар O_1 и радиус r и A е произволна точка на k_1 (цртеж десно). Конструираме кружница k_2 која ја содржи точката A и ја сече кружницата k_1 во уште една точка B. Со O_2 да го означиме центарот на кружницата k_2. Тогаш AO_2BO_1 е ромб со страна r, па следува $\overrightarrow{BO_2} = -\overrightarrow{AO_1}$. Конструираме кружница k_3 која ја содржи точката B и ја сече кружницата k_2 во уште една точка C. Потоа конструираме кружница k_4 која ја содржи точката C и ги сече кружниците k_1 и k_3 соодветно во точките D и E.

На крајот конструираме кружница k_5 која ги содржи точките D и E и е различна од k_4. Кружницата k_5 има заедничка точка E со кружницата k_1. Нека F е другата пресечна точка на тие две кружници (не е исклучена можноста $F \equiv E$). Со O_3, O_4, O_5 да ги означиме соодветно центрите на кружниците k_3, k_4, k_5. Аналогно како при разгледување на центрите на кружниците k_1 и k_2 и точките A и B на нивниот пресек добиваме

$$\overrightarrow{FO_1} = -\overrightarrow{EO_5} = \overrightarrow{DO_4} = -\overrightarrow{CO_3} = \overrightarrow{BO_2} = -\overrightarrow{AO_1}.$$

Според тоа, точката F на кружницата k_1 е дијаметрално спротивна на точката A.

3. На рамен бел лист хартија се означени неколку точки кои се на меѓусебно растојание поголемо од 2. Невнимателен ученик капнал капка мастило на листот и мастилото се распрскало по листот покривајќи површина со плоштина помала од π. Докажи дека постои вектор $\vec{v}$ таков што $|\vec{v}|<1$ и дека по транслација на означените точки за тој вектор ниту една точка не останува во испрсканиот дел од хартијата.

Решение. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се означените точки и O е произволна точка во рамнината. Со $D_1, D_2, ..., D_n$, D да ги означиме круговите со центри $A_1, A_2, ..., A_n, O$ и радиус 1. Ги транслатираме круговите $D_1, D_2, ...,$ D_n редоследно за вектори $\overrightarrow{A_1O}, \overrightarrow{A_2O}, ..., \overrightarrow{A_nO}$. Бидејќи обоената плоштина е помала од π, постои внатрешна точка X на кругот D која по извршените транслации не е покриена со обоена површина. Ќе докажеме дека $\overrightarrow{OX}$ е вектор за кој важат условите на задачата. За произволен $k \in \{1, 2, ..., n\}$ со X_k да ја означиме точката определена со условот $\overrightarrow{A_kX_k} = \overrightarrow{OX}$. Тогаш X_k е внатрешна точка за кругот D_k и важи $\overrightarrow{A_kO} = \overrightarrow{X_kX}$. Точката X_k не припаѓа на обоената површина бидејќи со транслација на кругот D_k за вектор $\overrightarrow{A_kO}$ таа преминува во точката X (види цртеж).