Н.Пандески
Скопје

СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Непосреден повод за пишување на оваа статија е решението на следната задача.

Задача 1. Нека x, y и z се цели броеви и нека бројот $x+y+z$ е делив со 6. Тогаш, бројот $x^3+y^3+z^3$ е делив со 6.

Решение. Во идентитетот

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz, \qquad (1)$$

во чија точност можеме да се убедиме со непосредна проверка, секој од првите два собирци на десната страна е делив со 6, а третиот собирок $3xyz$ е делив со 6 ако и само ако еден од целите броеви x, y и z е парен. Бидејќи збирот $x+y+z$ е делив со 6 добиваме дека барем еден од броевите x, y и z е парен, (во спротивно $x+y+z\neq 6k$, што противречи на условот на задачата). Според тоа, $6|(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz$, т.е. $6|x^3+y^3+z^3$.

Внимателниот читател веднаш ќе се запраша како е добиен идентитетот (1). Токму одговорот на ова не така едноставно прашање е предмет на нашата статија.

1. ПОИМ ЗА СИМЕТРИЧЕН ПОЛИНОМ

Дефиниција 1. Полиномот $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$, од n променливи $x_1,x_2,\dots,x_n$, го нарекуваме симетричен ако $P(x_1,x_2,\dots,x_n)=P(\pi(x_1),\pi(x_2),\dots,\pi(x_n))$, за секоја биекција $\pi:\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\to\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

Пример 1. Полиномот $P(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3$ е симетричен, бидејќи при произволна биекција $\pi:\{x_1,x_2,x_3\}\to\{x_1,x_2,x_3\}$, освен идентичната, се менува само редоследот на собирците на полиномот, па како важи комутативниот закон за операцијата собирање на полиноми добиваме

$$P(x_1,x_2,x_3)=P(\pi(x_1),\pi(x_2),\pi(x_3)).$$

За да провериме дали еден полином $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ е симетричен доволно е да констатираме дека полиномот не се менува ако било кои две променливи си ги заменат местата, т.е. дека полиномот не се менува при произволна транспозиција на променливите. Точноста на последното тврдење непосредно следува од фактот дека секоја биекција $\pi:\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\to\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ може да се запише како композиција на конечен број транспозиции на променливите $x_1,x_2,\dots,x_n$.

Во алгебрата посебна улога имаат основните симетрични полиноми:

$$p_1=x_1+x_2+\dots+x_n,\ p_2=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_1x_n+x_2x_3+\dots+x_2x_n+\dots+x_{n-1}x_n,\ \dots,\ p_n=x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n$$

Така, на пример, симетричниот полином $x^3+y^3+z^3$ со помош на основните симетрични полиноми можеме да го запишеме во обликот

$$x^3+y^3+z^3=p_1^3-3p_1p_2+3p_3. \tag{3}$$

Доказот на (1), односно на (2), непосредно следува од таканаречената основна теорема за симетрични полиноми. Пред да ја разгледаме оваа теорема да забележиме дека, секој полином $Q(p_1,p_2,\dots,p_n)$, чии променливи се основните симетрични полиноми $p_1,p_2,\dots,p_n$, е симетричен полином од променливите $x_1,x_2,\dots,x_n$.

Во доказот на основната теорема за симетрични полиноми се користи таканареченото лексикографско подредување на симетричен полином. Имено, ако $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ и $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}$ се два различни собирци на полиномот $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$, тогаш велиме дека собирокот $Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ му претходи на собирокот $Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}$ ако $\alpha_1<\beta_1$ или ако $\alpha_i=\beta_i$, $i=1,\dots,k<n$ и $\alpha_{k+1}<\beta_{k+1}$.

Пример 2. Јасно, мономот $6x_1^4x_2^4x_3^2$ му претходи на мономот $4x_1^5x_2^2x_3$, а мономот $x_1^3x_2^4x_3^8$ му претходи на мономот $-2x_1^3x_2^5x_3^2$.

2. ОСНОВНА ТЕОРЕМА ЗА СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Во овој параграф ќе ја разгледаме основната теорема за симетричните полиноми:

Теорема 1. Секој симетричен полином $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$, од n променливи $x_1,x_2,\dots,x_n$ може да се изрази со полином $Q(p_1,p_2,\dots,p_n)$ во кој променливите $p_1,p_2,\dots,p_n$ се основните симетрични полиноми.

Доказ. Нека претпоставиме дека симетричниот полином $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ е даден во лексикографски запис, што значи дека собирците се запишани по ред, така што следниот собирок секогаш му претходи на собирокот кој се наоѓа после него. Во овој случај нека е

$$A_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} \tag{3}$$

првиот собирок во ваквиот запис. Притоа за степените $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ во овој собирок мора да важи

$$\alpha_1\ge\alpha_2\ge\dots\ge\alpha_n. \tag{4}$$

Навистина, ако, спротивно на (4), постои индекс i таков што $\alpha_i<\alpha_{i+1}$, тогаш симетричниот полином $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ содржи член кој се добива од (3) со транспозиција на променливите x_i и x_{i+1}, од каде следува дека новиот собирок во лексикографски запис ќе биде пред првиот собирок, што е противречност.

Лесно се докажува дека производ на симетрични полиноми е симетричен полином, од што следува дека изразот

$$k_1=A_0p_1^{\alpha_1-\alpha_2}p_2^{\alpha_2-\alpha_3}\dots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}p_n^{\alpha_n} \tag{5}$$

при услов (4) е симетричен полином од променливите $x_1,x_2,\dots,x_n$, а неговиот прв собирок е еднаков на собирокот (3).

Навистина, првите лексикографски собирци на основните симетрични полиноми $p_1, p_2, \ldots, p_n$ се x_1, x_1x_2, $x_1x_2x_3$, ..., $x_1x_2\ldots x_n$, соодветно, па затоа првиот собирок на симетричниот полином (5) е

$$A_o x_1^{\alpha_1-\alpha_2}\left(x_1x_2\right)^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots\left(x_1x_2\ldots x_{n-1}\right)^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}\left(x_1x_2\ldots x_n\right)^{\alpha_n} = A_o x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Ако од симетричниот полином $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ го одземеме симетричниот полином (5), добиваме нов симетричен полином $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кој во својот лексикографски запис не го содржи собирокот (3), што може скратено да се запише $P = P_1 + k_1$. Полиномот $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ има свој прв собирок и неговото исклучување од симетричниот полином се реализира со аналогна постапка како и за полиномот $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, со што добиваме $P_1 = P_2 + k_2$ итн.

Постапката на ваквото снижување е конечна. Навистина, ако во k-от чекор се добива симетричен полином $P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ со лексикографски прв член

$$Lx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n} \tag{6}$$

тогаш од една страна за неговите степенови показатели важи $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n$, а од друга страна $\alpha_1 \geq \beta_1$ бидејќи собирокот (3) во лексикографски запис му претходи на собирокот (6). Релациите $a_1 \geq b_1$ и $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ може да ги задоволува само конечна фамилија множества ненегативни цели броеви $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Значи, после конечен број чекори постапката ќе заврши, т.е. ќе се добие цел број s таков што

$$P_{s-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A_s p_1^{r_1-r_2} p_2^{r_2-r_3}\ldots p_{n-1}^{r_{n-1}-r_n} p_n^{r_n} = 0.$$

Оттука следува дека

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_o p_1^{\alpha_1-\alpha_2} p_2^{\alpha_2-\alpha_3}\ldots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} p_n^{\alpha_n} + \ldots + A_s p_1^{r_1-r_2} p_2^{r_2-r_3}\ldots p_{n-1}^{r_{n-1}-r_n} p_n^{r_n}$$

т.е. полиномот $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ го запишавме како полином $Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ чии променливи се основните симетрични полиноми, со што ја докажавме теоремата. ♦

Доказот на следната теорема заради тежината нема да го презентираме.

Теорема 2. Изразувањето на симетричниот полином $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ преку основните симетрични полиноми $p_1, p_2, \ldots, p_n$, во облик $Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ е еднозначно. ♦

Да забележиме дека, постапката на изразување на симетричниот полином $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ преку основните симетрични полиноми, која е користена во доказот на основната теорема, е погодна за практична примена. Притоа за одредување на коефициентите $A_o, \ldots, A_s$ најпогодно е да се користи методот на неопределените коефициенти. Овој метод се состои во споредување на коефициентите пред соодветниет степени и го користи фактот дека два полиноми се еднакви ако имаа еднакви коефициенти пред соодветните степени.

Дефиниција 2. За симетричниот полином $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ велиме дека е хомогено симетричен ако сите негови собирци се со ист степен.

Да забележиме дека постапката од теорема 1 е применлива за хомогено симетрични полиноми. Ако симетричниот полином не е хомоген, тогаш прво треба да го запишеме како збир на хомогено симетрични збирови, а потоа, користејќи го методот на неодредени коефициенти секој збир посебно да го изразиме преку основните симетрични полиноми.

3. РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

Во овој параграф ќе се осврнеме на неколку карактеристични примери на примена на симетричните полиноми. Во следната задача ќе дадеме одговор на прашањето како е добиен идентитетот (1).

Задача 2. Симетричниот полином $P(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3$, запишете го како полином $Q(p_1,p_2,p_3)$, чии променливи се основните симетрични полиноми $p_1=x_1+x_2+x_3$, $p_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $p_3=x_1x_2x_3$.

Решение. Полиномот $Q(p_1,p_2,p_3)$ ќе го определиме со помош на собирците од облик

$$A_i p_1^{\alpha_1-\alpha_2} p_2^{\alpha_2-\alpha_3} p_3^{\alpha_3}, \tag{7}$$

каде $A_i, i=1,2,3$ се неопределени коефициенти чии индекси зависат од лексикографскиот запис на полиномот $Q(p_1,p_2,p_3)$, а $\alpha_i, i=1,2,3$ се ненегативни цели броеви за кои важи

$$\alpha_1\ge\alpha_2\ge\alpha_3 \text{ и } \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=6 \tag{8}$$

Подредени тројки $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ за кои важи релацијата (8) се: (3,0,0); (2,1,0) и (1,1,1). Со замена во (7) за полиномот $Q(p_1,p_2,p_3)$ ги добиваме собирците $A_1p_1^3, A_2p_1p_2, A_3p_3$.

Од теорема 1 имаме

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3 = A_1p_1^3+A_2p_1p_2+A_3p_3. \tag{9}$$

Броевите A_1,A_2,A_3 во (9) ги одредуваме со помош на методот на неодредени коефициенти. За $x_1=x_2=0, x_3=1$ наоѓаме $A_1=1$ За $x_1=0, x_2=x_3=1$ и $A_1=1$ добиваме $A_2=-3$ и за $x_1=x_2=x_3=1$, $A_1=1$ и $A_2=-3$ добиваме $A_3=3$. Со замена во (9) го добиваме записот (2), кој е еквивалентен на записот (1).

Задача 3. Ако $x+y+z=0$, тогаш

а) $x^3+y^3+z^3=3xyz$ б) $x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)=0$.

Решение. а) Од $x+y+z=0$ и релацијата (1) имаме

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz=0^3-3\cdot0\cdot(xy+yz+zx)+3xyz=3xyz.$$

б) Од $x+y+z=0$ имаме $x=-(y+z)$, $y=-(x+z)$ и $z=-(x+y)$. Со замена во $x^3+y^3+z^3=3xyz$ добиваме $x^3+y^3+z^3=-3(x+y)(y+z)(z+x)$ односно

$$x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

Задача 4. Решете го системот равенки

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=64 \\ x^2+y^2+z^2=25 \\ x+y+z=4 \end{cases} \tag{10}$$

Решение. Од $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ имаме дека системот (10) е еквивалентен на системот $\begin{cases} p_1=4 \\ p_1^2-2p_2=25 \\ p_1^3-3p_1p_2+3p_3=64 \end{cases}$ чие решение е $p_1=4, p_2=-\frac{9}{2}, p_3=-18$. Значи, $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+zx=-\frac{9}{2} \\ xyz=-18 \end{cases}$. Од Виетовите правила имаме дека последниот систем ги определува коефициентите на кубната равенка $v^3-4v^2-\frac{9}{2}v+18=0$ чии решенија се $v_1=4, v_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}, v_3=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Решенија на почетниот систем се сите пермутации (биекции) на броевите v_1, v_2, v_3 за броевите x, y, z, соодветно.

Задача 5. Докажете дека, ако

$$x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1, \qquad (11)$$

тогаш, $xy+yz+zx=xyz=0$.

Решение. Од условите (11) добиваме

$$\begin{cases} p_1=1 \\ p_1^2-2p_2=1 \\ p_1^3-3p_1p_2+3p_3=1 \end{cases}$$

Решавајќи го последниот систем наоѓаме $p_2=p_3=0$, т.е. $xy+yz+zx=xyz=0$.

Задача 6. Во множеството реални броеви решете го системот равенки

$$\begin{cases} x^5+y^5=275 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Решение. Прво со помош на основните симетрични полиноми ќе го разложиме симетричниот полином $f(x,y)=x^5+y^5$. Релациите $a_1 \geq a_2$ и $a_1+a_2=5$ ги задоволуваат следните парови броеви 5,0; 4,1; 3,2. Од методот на неодредени коефициенти имаме $x^5+y^5=A_1p_1^5+A_2p_1^3p_2+A_3p_1p_2^2$, односно

$$x^5+y^5=A_1(x+y)^5+A_2(x+y)^3xy+A_3(x+y)x^2y^2.$$

За x=0, y=1 имаме $A_1=1$. За x=2, y=1 имаме $A_2=-5$ и за x=1, y=1 имаме $A_3=5$. Значи, $x^5+y^5=(x+y)^5-5(x+y)^3xy+5(x+y)x^2y^2$.

Сега за системот имаме

$$\begin{cases} p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2=275 \\ p_1=5 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} p_2^2-25p_2+114=0 \\ p_1=5 \end{cases}.$$

Решенија на последниот систем се $p_1=5,\ p_2=19$ и $p_1=5,\ p_2=6$, па затоа добиваме

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=19 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}.$$

Решавајќи го посебно секој од последните системи ги добиваме решенијата:

$$(x,y)\in\left\{\left(\frac{5+\sqrt{-51}}{2},\frac{5-\sqrt{-51}}{2}\right);\left(\frac{5-\sqrt{-51}}{2},\frac{5+\sqrt{-51}}{2}\right);(2,3);(3,2)\right\}$$

Задача 7. Пресметајте го збирот x^5+y^5 ако $x+y=a$ и $x^2+y^2=b$.

Решение. Од $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ и условот на задачата добиваме $x+y=a$ и $xy=\frac{a^2-b}{2}$. Од решението на предходната задача имаме

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5(x+y)^3xy+5(x+y)(xy)^2=a^5-5a^3\frac{a^2-b}{2}+5a\left(\frac{a^2-b}{2}\right)^2.$$

Задача 8. Полиномот $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$, разложете го на множители.

Решение. Од $x+y=p_1-z,\ y+z=p_1-x,\ z+x=p_1-y$ и $xyz=p_3$ добиваме:

$$(x+y)(y+z)(z+x)=(p_1-x)(p_1-y)(p_1-z)+p_3=$$
$$=p_1^3-p_1^2(x+y+z)+p_1(xy+yz+zx)-xyz+p_3=$$
$$=p_1^3-p_1^3+p_1p_2-p_3+p_3=p_1p_2=(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

4. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

На крајот од оваа статија ви предлагаме самостојно да ги решите следните задачи, што ќе ви овозможи целосно да ја совладате изложената материја.

Задача 9. Симетричниот полином

$$f(x,y,z)=x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2$$

изразете го преку основните симетрични полиноми.

Задача 10. Решете го системот равенки

$$\begin{cases}x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2=48\\ xy+yz+xz=11\\ xyz=6\end{cases}$$

Задача 11. Ако $x+y+z=0$, тогаш $x^4+y^4+z^4=2(xy+yz+zx)^2$. Докажете.

Задача 12. Разложете го на множители полиномот

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5.$$

Задача 13. Докажете дека, ако $x+y+z=0$, тогаш

а) $\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$ б) $\frac{x^7+y^7+z^7}{7}=\frac{x^4+y^4+z^4}{2}\cdot\frac{x^3+y^3+z^3}{2}$

Задача 14. Ако $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ и $xyz=abc$, тогаш $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=4$.

Докажете!

Литература:

1. D.S.Mitrinović, D.Ž.Đoković: *Polinomi i matrice*, Izdavačko informativni centar studenata, Beograd,1975
2. Р.Малчески, А.Малчески: *Избрани содржини од елементарна математика*, СИГМА, Скопје, 1993

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија