ММО 2001

1. Докажи дека равенката $mx^2 - sy^2 = 3$, $m,s \in \mathbb{Z}$, нема решение во $\mathbb{Z}$ ако $m \cdot s = 2000^{2001}$.

Решение. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека равенката

$$mx^2 - sy^2 = 3,\ m,s \in \mathrm{Z} \text{ и } ms = 2000^{2001}$$

има решение $x_\circ$, $y_\circ$ во $\mathbb{Z}$. Тогаш,

$$mx_\circ^2 = sy_\circ^2 + 3$$

и бидејќи $m \neq 0$ добиваме,

$$m^2x_\circ^2 = msy_\circ^2 + 3m = 2000^{2001}y_\circ^2 + 3m, \quad \text{т.е.}$$

$$(mx_\circ)^2 \equiv msy_\circ^2 + 3m \equiv (-1)^{2001}y_\circ^2 \equiv -y_\circ^2 \pmod 3.$$

Квадрат на цел број може да има остаток 0 или 1 по модул 3, па според тоа

$$(mx_\circ)^2 \equiv -y_\circ^2 \equiv 0 \pmod 3,$$

т.е. $3 \mid y_\circ^2 \Rightarrow 3 \mid y_\circ$. Аналогно се добива дека $3 \mid x_\circ$. Но во тој случај $9 \mid x_\circ^2$ и $9 \mid y_\circ^2$, па $9 \mid mx_\circ^2 - sy_\circ^2$, т.е. $9 \mid 3$.

2. Дали постои функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква што за секој $n \geq 2$ важи

$$f\big(f(n-1)\big) = f(n+1) - f(n)\,?$$

Решение. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$. За секој $i = 2,\ldots,n$ важи

$$f\big(f(i-1)\big) = f(i+1) - f(i).$$

Го формираме збирот $\sum_{i=2}^{n} f(f(i-1))$ и добиваме:

$$\sum_{i=2}^{n} f(f(i-1)) = \sum_{i=2}^{n}\big(f(i+1) - f(i)\big) = f(n+1) - f(2),$$

односно $f(n+1) = f(2) + \sum_{i=2}^{n} f(f(i-1)) \geq n$ (f е функција во $\mathbb{N}$). Значи

$$f(i-1) \geq i-2,\ f(f(i-1)) \geq f(i-2) \geq i-3,$$

па според тоа

$$f(n+1) = f(2) + f(f(1)) + f(f(2)) + \sum_{i=4}^{n} f(f(i-1)) \geq$$

$$\geq 3 + \sum_{i=4}^{n}(i-3) = 3 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Значи $f(n+1) \geq \dfrac{n^2 - 5n + 12}{2} > 2n+1$ за $n \geq 10$. Нека $f(2n) = M > 4n+3$. Тогаш имаме

$$f(M) = f(2) + \sum_{i=2}^{M-1} f(f(i-1)),$$

$$f(2n)=f(2)+\sum_{i=2}^{2n-1} f(f(i-1)),$$

$$f(M)-f(2n)=f(f(2n))+f(f(2n+1))+\ldots+f(f(M-2)).$$

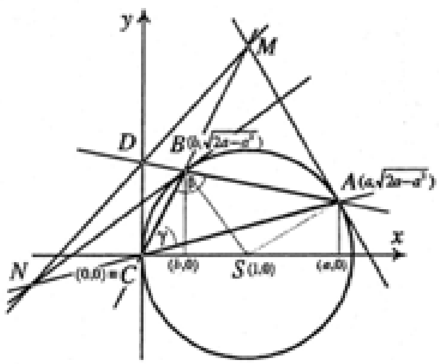
Но $f(f(2n))=f(M)$ па добиваме

$$-f(2n)=f(f(2n))+f(f(2n+1))+\ldots+f(f(M-2))$$

што не е можно. Значи не постои таква функција.

3. Нека ABC е разностран триаголник впишан во кружница k. Нека t_A, t_B, t_C се тангентите на кружницата k во точките A, B, C соодветно. Докажи дека: $AB \nparallel t_C$, $AC \nparallel t_B$, $BC \nparallel t_A$ и дека точките $AB\cap t_C$, $AC\cap t_B$, $BC\cap t_A$ се колинеарни.

Решение. Избираме правоаголен координатен систем со почеток во C, и правата t_C за y-оска. Тогаш за секоја точка од кружницата важи $(x-1)^2+y^2=1$. Нека $A(a,\sqrt{2a-a^2})$ и $B(b,\sqrt{2b-b^2})$. Да означиме $A=2a-a^2$ и $B=2b-b^2$. Тогаш правите t_A и OB имаат равенки $y-\sqrt{A}=\frac{1-a}{\sqrt{A}}(x-a)$ и $y=\frac{\sqrt{B}}{b}x$ соодветно, па за пресечната точка $M(x_M, y_M)$ на овие две прави добиваме: $x_M=\frac{ab}{D_B}$, $y_M=\frac{a\sqrt{B}}{D_b}$ каде $D_b=\sqrt{A}\sqrt{B}-b(1-a)$. Слично, ако $N(x_N, y_N)$ е пресечната точка на правите AC и t_B добиваме $x_N=\frac{ab}{D_a}$ и $y_N=\frac{b\sqrt{A}}{D_a}$, каде $D_a=\sqrt{A}\sqrt{B}-a(1-b)$. Ако $D(x_D, y_D)$ е пресечна точка на правите AB и t_C добиваме $x_D=0$ и $y_D=\frac{b\sqrt{A}-a\sqrt{B}}{b-a}$.



Равенката на правата MN е

$$y-y_N=\frac{y_M-y_N}{x_M-y_N}(x-x_N).$$

За $x=0$ добиваме

$$y=y_N-\frac{-\frac{b\sqrt{A}}{D_a}+\frac{a\sqrt{B}}{D_b}}{\frac{ab}{D_b}-\frac{ab}{D_a}}x_n=\ldots=\frac{b\sqrt{A}-a\sqrt{B}}{b-a}.$$

Според тоа добиваме дека правата MN ја сече t_C (т.е. y-оската) во точката D, па точките M, N и D се колинеарни. Ако претпоставиме дека $t_A \parallel BC$, тогаш $\angle MAB=\angle CBA$. Оттука $\angle MAB=90^\circ-\angle BAS=90^\circ-(90^\circ-\gamma)=\gamma$. Но $\angle CBA=\beta$, па добиваме $\beta=\gamma$, односно триаголникот ABC не е разностран, што е во противречност со условот на задачата. Според тоа $AB\nparallel t_C$, $AC\nparallel t_B$, $BC\nparallel t_A$.

4. Нека M е конечно множество и нека $\Omega \subseteq \mathcal{P}(M)$ (партитивно множество) за кое важат следниве услови:

(1) Ако за $A, B \in \Omega$ важи $|A \cap B| \geq 2$, тогаш $A = B$;

(2) Постојат $A, B, C \in \Omega$, такви што $A \neq B \neq C \neq A$ и $|A \cap B \cap C| = 1$;

(3) За секој $A \in \Omega$, и за секој $a \in M \setminus A$, постои единствено $B \in \Omega$, такво што $a \in B$ и $A \cap B = \varnothing$.

Докажи дека постојат броеви p и s такви што:

(а) За секој $a \in M$, бројот на множествата од Ω што ја содржат точката a е p;

(б) За секој $A \in \Omega$, $|A| = s$;

(в) $s + 1 \geq p$.

Решение. (а) Нека $x \in M$. Да означиме $\langle x \rangle = \{X \in \Omega \mid x \in X\}$. Ќе докажеме дека $(\forall x, y \in M) |\langle x \rangle| = |\langle y \rangle|$. Дефинираме пресликување

$$\varphi : \langle x \rangle \to \langle y \rangle \quad \text{со} \quad \varphi(T) = \begin{cases} T & , y \in T \\ T', & y \notin T \end{cases},$$

каде T' е множеството за кое $y \in T'$ и $T \cap T' = \varnothing$ а неговото постоење и единственост следува од (3) и притоа φ е биекција. Значи $|\langle x \rangle| = |\langle y \rangle|$. Според тоа ако $a \in M$ и $p = |\langle a \rangle|$ следува дека и секое друго множество од Ω што ја содржи a ќе има p елементи.

(б) Нека $A, B \in \Omega$ и $A \neq B$. Ќе дефинираме биекција меѓу A и B.

1° $A \cap B = \varnothing$. Нека $a \in A$. Тогаш $a \notin B$. Од $|\langle a \rangle| \geq 3$ (следува од условот (2)) следува дека постои $C \in \Omega$ така што $C \cap B \neq \varnothing$ и $C \cap B = \{a'\}$. Дефинираме пресликување $\psi : A \to B$ со $\psi(a) = a'$. За постои $D \in \Omega$ така што $D \cap C = \varnothing$, $D \cap B = \{x'\}$ и $D \cap A = \{x\}$. Сега ставаме $\psi(x) = x'$. ψ е биекција (за сурјективноста се користи условот (3)). Според тоа $|A| = |B|$.

2° $A \neq B$, $0 < |A \cap B| \leq 1$, па нека $A \cap B = \{a\}$. Дефинираме пресликување $\psi : A \to B$ со $\psi(a) = a$. Од условот (2) следува дека постои $C \in \Omega$ така што $a \in C, C \neq A, C \neq B$. Нека $x \in A$ е произволен елемент. Од условот (3) постои $D \in \Omega$ така што $x \in D, D \cap B = \varnothing$ и $D \cap C = \{x''\}$. Повторно од условот (3) постои $E \in \Omega$ така што $E \cap A = \varnothing$ и $E \cap B = \{x'\}$. По дефиниција ставаме $\psi(x) = x'$. ψ е биекција. Значи $|A| = |B|$.

Нека $A \in \Omega$ е произволно и нека $s = |A|$. Тогаш од 1° и 2° добиваме $(\forall B \in \Omega) |B| = s$.

(в) Нека $A \in \Omega$ е произволно. Според (б) имаме $|A| = s$. Нека $a \notin A$. Од (а) $|\langle a \rangle| = p$. Од (3) постои $B \in \Omega$ така што $B \cap A = \varnothing$ и $a \in B$. За секој $C \in \langle a \rangle$, $C \cap A \neq \varnothing$ (следува од (1)). Множества C со такво својство, заради $|\langle a \rangle| = p$ има $p - 1$, и заради $|A| = s$ добиваме $p - 1 \leq s$ т.е. $p \leq s + 1$.