Ристо Малчески
Скопје

СИМСОНОВА ФОРМУЛА

На прв поглед определувањето на волумен на стебло на дрво изгледа лесна задача. Меѓутоа, точно да се определи овој волумен не е ниту лесно, ниту едноставно. Имено, стеблото на дрвото, дури и да е совршено мазно, не е ниту цилиндар, ниту конус, ниту пресечен конус, ниту било кое друго тело чиј волумен знаеме да го пресметаме со дадена формула. Затоа споменатиот волумен се пресметува со виша математика, т.е. со интегралното сметање. Но, бидејќи интегралното сметање не се учи во основното образование, т.е. учениците со него се среќаваат дури во четврта година од гимназиското образование, не ни преостанува ништо друго, туку да се задоволиме само со приближно пресметување на волуменот на стеблото на дрвото. Притоа ќе сметаме дека стеблото многу не се разликува од пресечен конус или конус или пак цилиндар.

Познати ни се формулите за пресметување на волумен на призма, пирамида, цилиндар, конус и топка. Понатаму, ако овде ги земеме и формулите за пресметување на волумен на потсечен конус и потсечена пирамида, гледаме дека треба да знаеме седум формули за да ги пресметаме волумените на споменатите седум тела. Оттука природно е да се запрашаме: *Дали постои една општа формула за пресметување волумен, која би важела за сите спомената седум геометриски тела*? Одговорот на поставеното прашање е позитивен и оваа формула во математиката е позната како *Симпсонова формула*, која ни овозможува да го пресметаме волуменот на стеблото, без притоа да не интересира дали тоа личи на цилиндар, на конус или потсечен конус.

Симсоновата формула е:

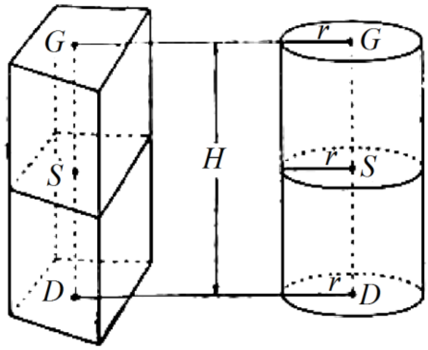
$$V=\frac{H}{6}(D+4S+G), \tag{1}$$

каде: H е висината на телото, D е плоштината на долната основа, S е плоштината нма средниот пресек (пресекот на телото низ средината на висината паралелен со основите) и G плоштината на горната основа.

Ќе докажеме дека со формулата (1) навистина може да се пресмета волуменот на секое од следниве седум тела: призма, пирамида, потсечена пирамида, цилиндар, конус, потсечен конус и топка. Притоа заради идентичноста на постапките овие тела ќе ги поделиме на четири групи и тоа на:

1. Призма и цилиндар, 2. Пирамида и конус, 3. Потсечена пирамида и потсечен конус и 4. Топка.

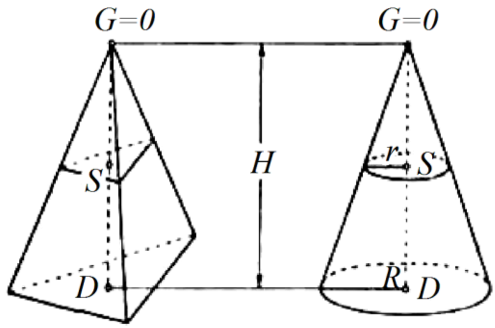
1. За призма и цилиндар (цртеж десно) плоштините на долната основа D, горната основа G и средниот пресек се еднакви, па затоа со примена на формулата (1) добиваме



$$V=\frac{H}{6}(D+4S+G)=\frac{H}{6}\cdot 6D=DH.$$

Ако D ја означиме вообичаено со B, добиваме $V=BH$, а тоа ни е добро познатата формула за волумен на призма, при што во зависност од тоа каква е призмата треба да се пресмета B. За цилиндарот, како што знаеме $B=\pi r^2$, каде r е радиусот на основата, па затоа $V=\pi r^2 H$.

2. За пирамида и конус (цртеж десно) средниот пресек е сличен со основата, а димензиите му се два пати помали од димензиите на основата. Навистина, кај пирамидата секоја страна на многуаголникот кој се добива за средниот пресек всушност е средна линија на соодветен ѕид (триаголник) на омотачот, па затоа е еднаква на половина од соодветната страна на основата. Понатаму, и другите должински елементи се два пати пократки отколку кај многуаголникот на основата. Оттука следува дека плоштината на пресекот кој е сличен многуаголник со коефициент на сличност 2, е помала $2^2=4$ пати од плоштината на основата. Според тоа, $S=\frac{D}{4}$. За конусот добиваме исто: ако R е радиусот на основата, тогаш радиусот на средниот пресек е $r=\frac{R}{2}$, па затоа



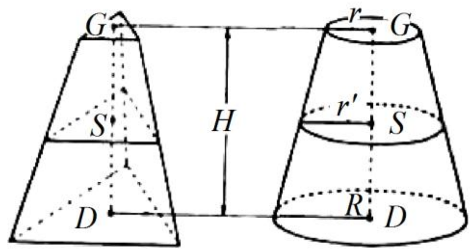
$$D=\pi R^2 \text{ и } S=\frac{\pi R^2}{4},$$

односно $S=\frac{D}{4}$. Но, во овој случај $G=0$, па од (1) добиваме

$$V=\frac{H}{6}(D+4S+G)=\frac{H}{6}(D+4\cdot\frac{D}{4})=\frac{1}{3}DH,$$

а тоа е добро познатата формула за волумен на пирамида и конус, бидејќи ако D стандардно го означиме со B, добиваме $V=\frac{1}{3}BH$, при што за конусот имаме $D=\pi R^2$ и затоа $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

3. За потсечената пирамида и потсечениот конус (цртеж десно) исто така важи формулата (1). Така, за потсечниот конус имаме $r'=\frac{r+R}{2}$, па затоа



$$S=\pi r'^2=\pi(\frac{r+R}{2})^2$$
$$=\frac{\pi}{4}(R^2+2Rr+r^2),$$

$D=\pi R^2$ и $G=\pi r^2$. Со замена во (1) добиваме

$$V=\frac{H}{6}(D+4S+G)=\frac{H}{6}(\pi R^2+4\cdot\frac{\pi}{4}(R^2+2Rr+r^2)+\pi r^2)$$
$$=\frac{\pi H}{6}(2R^2+2Rr+2r^2)=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2),$$

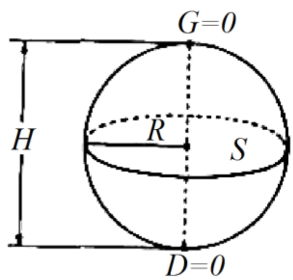
и тоа е добро позната формула за волумен на потсечен конус.

Кај потсечената пирамида може да се докаже дека за плоштината на средниот пресек важи $\sqrt{S}=\frac{\sqrt{D}+\sqrt{G}}{2}$, од каде следува $S=(\frac{\sqrt{D}+\sqrt{G}}{2})^2$, односно $S=\frac{D+2\sqrt{DG}+G}{4}$, па со замена во (1) добиваме

$$V=\frac{H}{6}(D+4S+G)=\frac{H}{6}(D+4\cdot\frac{D+2\sqrt{DG}+G}{4}+G)$$
$$=\frac{H}{6}(2D+2\sqrt{DG}+2G)=\frac{H}{3}(D+\sqrt{DG}+G),$$

и тоа е добро позната формула за волумен на потсечена пирамида.

4. За топка (цртеж десно) имаме $H=2R$, $D=0$, $G=0$ и $S=\pi R^2$, па ако замениме во (1) добиваме



$$V=\frac{H}{6}(D+4S+G)$$
$$=\frac{2R}{6}(0+4\cdot\pi R^2+0)$$
$$=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

и тоа е добро познатата формула за волумен на топка.

Забелешка. Симсоновата формула покрај за приближно пресметување на волумен на стебло од дрво може да се искористи и за приближно пресметување на волумен на бочва (цртеж десно). Притоа ако се земе предвид дека горната и долната основа кај бочвите најчесто се кругови со еднаков радиус R, а средниот пресек е круг со радиус $r > R$, со замена во Симсоновата формула за волуменот на бочвата со висина H добиваме дека приближно е еднаков на

$$V = \frac{H}{6}(D + 4S + G) = \frac{H}{6}(\pi R^2 + 4\pi r^2 + \pi R^2) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + 2r^2).$$

Притоа треба да се има предвид дека димензиите за H, R и r треба да се мерат внатрешно. Така, на пример, ако имаме бочва со внатрешни висина $H = 90\,cm$, радиуси на основите $R = 30\,cm$ и радиус на средниот пресек $H = 35\,cm$, тогаш во оваа бочва можеме приближно да ставиме

$$V = \frac{90\pi}{3}(30^2 + 2\cdot 35^2) \approx 315570\,cm^3 = 315{,}57\,l$$

вино.