XLI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VII одделение

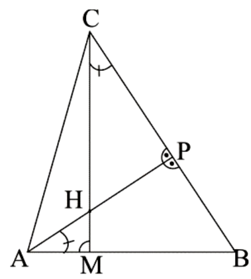
1. Али, Игор и Владимир вложиле заеднички износ на пари во едно коло на спортска прогноза. Поединечните влогови биле 600 денари, 900 денари и 1500 денари, соодветно. Тие добиле 17000 денари. По колку денари треба да добие секој од нив, за да правилно ја поделат добивката?

   Решение. Поединечните влогови ќе ги претвориме во проценти од заедничкиот влог. За да добивката биде правилно поделена, истите проценти ќе останат да важат и при поделбата на добивката. Така, Али вложил 600 денари од вкупно 3000 денари, тоа претставува $\frac{600}{3000}=\frac{1}{5}$ $=\frac{20}{100}=20\%$ од вкупниот износ. Игор вложил $\frac{900}{3000}=\frac{3}{10}=\frac{30}{100}=30\%$ од вкупниот износ и Владимир ги вложил преостанатите 50%. Тогаш Али треба да добие 20% од 17000 денари, што е $\frac{20}{100}\cdot 17000=3400$ денари. Игор треба да добие $\frac{30}{100}\cdot 17000=5100$ денари, а Владимир преостанатите пари кои се еднакви на вкупниот удел на Али и Игор, а тоа се 8500 денари, кои претставуваат точно 50% од добивката.

2. Павел зел неколку кибрити и ги истурил кибритчињата, па почнал од нив да прави фигури во форма на шестаголници и осумаголници. Должината на страната на секоја фигура била еднаква на должината на едно кибритче. Од сите 168 кибритчиња, Павел направил точно 23 фигури. Колку шестаголници направил Павел?

   Решение. Ако сите фигури се шестоаголници, тогаш бројот на употребени кибритчиња ќе биде $23\cdot 6=138$, т.е. Павел нема да искористи $168-138=30$ кибритчиња. При правењето на еден осуаголник се користат две кибритчиња повеќе отколку при правењето на шестаголникот. Значи, бројот на осумаголници е $30:2=15$. Конечно, Павел направил $23-15=8$ шестаголници.

3. Висините CM, AP во остроаголниот триаголник ABC се сечат во точката H. Определи го аголот ACB, ако $\overline{AB}=\overline{CH}$.



Решение. Ќе ги разгледаме триаголниците ABP и CHP (цртеж десно). За нив важи $\overline{AB}=\overline{CH}$. Потоа аглите во темето P се прави, а важи и $\measuredangle BAP=\measuredangle HCP$, како агли со заемно нормални краци. Значи, $\measuredangle ABP=\measuredangle CHP$. Сега, од признакот АСА, следува $\Delta ABP\cong\Delta CHP$, од каде следува $\overline{AP}=\overline{CP}$. Според тоа, ΔAPC е рамнокрак правоаголен, па затоа $\measuredangle ACB=\measuredangle ACP=45^{\circ}$.

4. Определи ги цифрите a и b така што $13\,|\,\overline{2a0b82}$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{2a0b82}&=200082+10000a+100b\\&=(15390\cdot 13+12)+(769\cdot 13+3)a+(7\cdot 13+9)b\\&=13\cdot 16166+(12+3a+9b).\end{aligned}$$

Значи, цифрите a и b треба да ги определиме од условот $13\,|\,12+3a+9b$. Имаме,

- ако $b=0$, тогаш $12+3a+9b=12+3a=3(4+a)$ и бидејќи $13\,|\,3(4+a)$, добиваме $a=9$,
- ако $b=1$, тогаш $12+3a+9b=21+3a=3(7+a)$ и бидејќи $13\,|\,3(7+a)$, добиваме $a=6$,
- ако $b=2$, тогаш $12+3a+9b=30+3a=3(10+a)$ и од $13\,|\,3(10+a)$, добиваме $a=3$,
- ако $b=3$, тогаш $12+3a+9b=39+3a=3(13+a)$ и од $13\,|\,3(13+a)$, добиваме $a=0$,
- ако $b=4$, тогаш $12+3a+9b=48+3a=3(16+a)$ и од $13\,|\,3(16+a)$, задачата во овој случај нема решение,
- ако $b=5$, тогаш $12+3a+9b=57+3a=3(19+a)$ и од $13\,|\,3(19+a)$, добиваме $a=7$,
- ако $b=6$, тогаш $12+3a+9b=66+3a=3(22+a)$ и од $13\,|\,3(22+a)$, добиваме $a=4$,
- ако $b=7$, тогаш $12+3a+9b=75+3a=3(25+a)$ и од $13\,|\,3(25+a)$, добиваме $a=1$,

- ако $b=8$, тогаш $12+3a+9b=84+3a=3(28+a)$ и од $13|3(28+a)$, задачата во овој случај нема решение,
- ако $b=9$, тогаш $12+3a+9b=93+3a=3(31+a)$ и од $13|3(31+a)$, добиваме $a=8$.

5. Броевите $1,2,3,...,16$ се запишани на листови, по еден број на еден лист. Коста, без гледање, последователно извлекува по еден лист, се додека производот на броевите запишани на некои два од извлечените листови не е точен квадрат. Кој е најголемиот број на листови, кои Коста може да ги извлече, без притоа производот на два броја запишани на некои од извлечените листови да биде точен квадрат?

Решение. Прости броеви помали од 16 се 2, 3, 5, 7, 11 и 13. Јасно, производот на било кои два од нив не е точен квадрат. Ако кон овие броеви го додадеме бројот 1, тогаш производот на било кои два броја од броевите 1, 2, 3, 5, 7, 11 и 13 не точен квадрат. Понатаму, броеви помали од 16 кои можат да се запишат како производ на два различни прости броја се $6=2\cdot 3, 10=2\cdot 5, 14=2\cdot 7$ и $15=3\cdot 5$. Јасно, производот на било кои два од овие броеви, но и производот на еден број од множеството $\{1,2,3,5,7,11,13\}$ и еден број од множеството $\{6,10,14,15\}$ не е точен квадрат. Значи, Коста може да извлече најмногу $7+4=11$ броеви, без притоа производот на два од извлечените броеви да е точен квадрат.

Конечно, ако понатаму Коста извлече било кој од броевите 4, 8, 9, 12 или 16, тогаш условот се нарушува бидејќи

$$1\cdot 4=2^2, 2\cdot 8=4^2, 1\cdot 9=3^2, 3\cdot 12=6^2 \text{ и } 1\cdot 16=4^2.$$

VIII одделение

1. Марко замислил шестцифрен број, чија цифра на стоилјадитите е 5. Потоа, цифрата 5 ја префрлил на местото на единиците, редоследот на останатите цифри останал непроменет и добил број кој е четири пати помал од замислениот број. Кој број го замислил Марко?

Решение. Од условот на задчата следува:

$$\overline{5abcde}=4\cdot \overline{abcde5}$$

$$500000+10000a+1000b+100c+10d+e=4(100000a+10000b+1000c+100d+10e+5)$$

$$500000-20+(10000-400000)a+(1000-40000)b+(10-4000)c+(10-400)d+(1-40)d=0$$

$499980-39(10000a+1000b+100c+10d+e)=0$

$39\cdot\overline{abcde}=499980$

$\overline{abcde}=12820$

Конечно, бараниот број е $\overline{5abcde}=512820$.

2. Производот на два трицифрени броја е број запишан само со цифрата 3. Кои се тие броеви?

Решение. Производот на два трицифрени броеви е поголем или еднаков на $100\cdot 100=10000$, а е помал од $1000\cdot 1000=1000000$. Според тоа, производот на два трицифрени броеви е петцифрен или шестцифрен број.

Ако производот е петцифрен број, тогаш

$$33333=3\cdot 11111=3\cdot 41\cdot 271=123\cdot 271,$$

што значи дека бараните броеви се 123 и 271.

Ако производот е шестцицифрен број, тогаш

$$333333=3\cdot 111111=3\cdot 111\cdot 1001=3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37 .$$

Понатаму, имаме

$$(3^2\cdot 7\cdot 11)(13\cdot 37)=693\cdot 481,$$

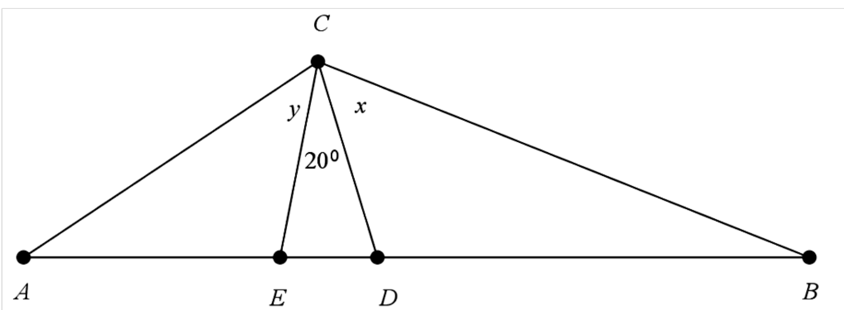
$$(3^2\cdot 7\cdot 13)(11\cdot 37)=819\cdot 407 \text{ и}$$

$$(3\cdot 7\cdot 37)(3\cdot 11\cdot 13)=777\cdot 429,$$

што значи дека бараните броеви се 481 и 693; 407 и 819; 429 и 777.

3. Во триаголникот ABC страната AB е најдолга. На страната AB се избрани точки D и E такви што $\overline{AC}=\overline{AD}$ и $\overline{BE}=\overline{BC}$. Определи го аголот $\measuredangle ACB$, ако $\measuredangle ECD=20^\circ$.

Решение. Нека $x=\measuredangle BCD$ и $y=\measuredangle ACE$. Бидејќи триаголникот BCE е рамнокрак, $2(20^\circ+x)+\measuredangle EBC=180^0$, односно



$$2(20^\circ + x) = 180^\circ - \measuredangle EBC.$$

Слично бидејќи триаголникот ACD е рамнокрак,

$$2(20^\circ + y) = 180^\circ - \measuredangle CAD.$$

Со собирање на овие две равенства добиваме

$$2(20^\circ + x + 20^\circ + y) = 180^\circ + (180^\circ - \measuredangle EBC - \measuredangle CAD),$$

односно $2(\measuredangle ACB + 20^\circ) = 180^\circ + \measuredangle ACB$, од каде следува $\measuredangle ACB = 140^\circ$.

4. Определи ги сите подредени парови реални броеви (x, y), такви што вредностите на три од четирите изрази $x+y, x-y, xy$ и $\frac{x}{y}$ се еднакви меѓу себе.

Решение. Јасно, $y \neq 0$. Ако $x+y = x-y$, тогаш $y = 0$, што не е можно. Според тоа, $x+y \neq x-y$. Сега, можни се два случаи.

Прв случај. Нека $x+y = xy = \frac{x}{y}$. Од $xy = \frac{x}{y}$, имаме $xy^2 = x$, односно $xy^2 - x = 0$, $x(y-1)(y+1) = 0$, од каде $x = 0$ или $y = 1$ или $y = -1$. Ако $x = 0$, тогаш имаме $y = 0$, што не е можно. Ако $y = 1$, тогаш имаме $x = x+1$, што е контрадикција. Ако $y = -1$, тогаш имаме дека $x - 1 = -x$, од каде $2x = 1$, па $x = \frac{1}{2}$. Значи, еден пар е $(x, y) = (\frac{1}{2}, -1)$.

Втор случај. Нека $x - y = xy = \frac{x}{y}$. Слично, имаме $xy^2 = x$, па $x = 0$ или $y = 1$ или $y = -1$. Ако $x = 0$, тогаш $y = 0$, што не е можно. Ако $y = 1$, тогаш имаме $-1 = 0$, што е контрадикција. Ако $y = -1$, тогаш $x + 1 = -x$, од каде $x = -\frac{1}{2}$. Значи, во овој случај $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -1)$.

5. Во правоаголниот триаголник ABC (со прав агол во темето C) едниот остар агол е три пати поголем од другиот. Пресметај ја плоштината на овој триаголник, ако должината на хипотенузата е $c = 8cm$.

Решение. Од условот на задачата следува дека острите агли на дадениот триаголник се $67,5^\circ$ и $22,5^\circ$. Нека, на пример, $\measuredangle ABC = 22,5^\circ$. Да доцртаме триаголник BCD складен со триаголникот ABC ($\overline{AB} = \overline{BD}$), види цртеж. Тогаш

$\measuredangle ABD = 2\measuredangle ABC = 2 \cdot 22,5^\circ = 45^\circ$.

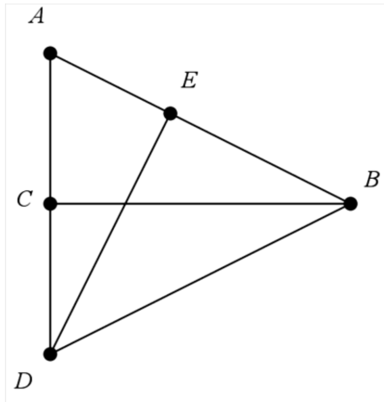
Тогаш плоштината на триаголникот ABD е

$$P_{ABD}=2P_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DE}}{2}=4\overline{DE},$$

каде што DE е висината спуштена од темето D кон страната AB. Но, BDE е рамнокрак правоаголен триаголник и $\overline{BE}=\overline{DE}$, па затоа $2\overline{DE}^2=\overline{BD}^2=8^2$, т.е. $\overline{DE}=4\sqrt{2}$. Конечно,

$$P_{ABD}=4\cdot4\sqrt{2}=16\sqrt{2}\text{ и}$$

$$P_{ABC}=8\sqrt{2}cm^2.$$



IX одделение

1. За кој природен број x изразот $A=\frac{x^{2016}+2x^{2015}}{x^{2015}-4x^{2014}}$ е цел број?

Решение. Имаме,

$$A=\frac{x^{2016}+2x^{2015}}{x^{2015}-4x^{2014}}=\frac{x^{2016}(x+2)}{x^{2015}(x-4)}=\frac{x(x+2)}{x-4}$$

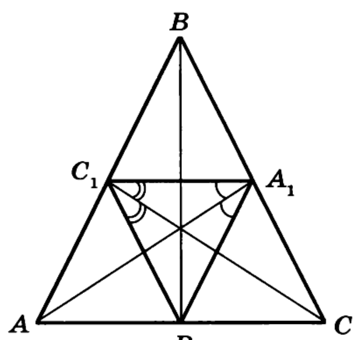
$$=\frac{x^2+2x-8x+8x+16-16}{x-4}=\frac{(x-4)^2+10(x-4)+34}{x-4}$$

$$=(x-4)+10+\frac{34}{x-4}.$$

Изразот A е цел број ако и само ако $x-4\in\{\pm1,\pm2,\pm17,\pm34\}$, т.е. ако и само ако $x\in\{-30,-13,2,3,5,6,21,38\}$.

2. Пресечната точка на тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 на ΔABC е центар на кружницата впишана во $\Delta A_1B_1C_1$. Докажи дека ΔABC е рамностран.

Решение. Бидејќи A_1B_1, A_1C_1 и B_1C_1 се средни линии за ΔABC следува дека AB_1A_1C е паралелограм. Бидејќи центарот на впишаната кружница лежи во пресекот на симетралите на аглите, следува дека AA_1 е симетрала на $\measuredangle B_1A_1C_1$, што значи дека паралелограмот AB_1A_1C е ромб. Според тоа,



$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC_1}=\overline{AB_1}=\frac{1}{2}\overline{AC}, \text{ т.е. } \overline{AB}=\overline{AC}.$$

Аналогно се докажува дека $\overline{BC}=\overline{AC}$, што значи дека ΔABC е рамностран.

3. Нека $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$. Определи ја вредноста на изразот $ab+cd$?

Решение. *Прв начин.* Од $a^2+b^2=1$, следува дека па не може истовремено и a и b да се еднакви на нула. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\neq 0$. Тогаш $c=-\frac{bd}{a}$. Имаме

$$1=c^2+d^2=\frac{b^2d^2}{a^2}+d^2=\frac{d^2(a^2+b^2)}{a^2}=\frac{d^2}{a^2}$$

Од каде следува $a^2=d^2$. Според тоа,

$$ab+cd=ab-\frac{bd^2}{a}=\frac{b}{a}(a^2-d^2)=0.$$

Втор начин. Ако двете страни на равенството $ac+bd=0$ ги помножиме со $ab+cd$ последователно добиваме

$$0=(ac+bd)(ad+bc)$$
$$0=a^2cd+abc^2+abd^2+b^2cd$$
$$0=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)$$
$$0=ab+cd.$$

4. Нека p и q, ($p\neq q$) се прости броеви такви што производот pq е дваесетцифрен број. Докажи дека во записот на производот pq барем една цифра се содржи најмалку трипати!

Решение. Нека производот pq е дваесетцифрен број и нека во неговиот запис ниту една цифра не се содржу повеќе од двапати. Но, записот има 20 цифри, па затоа тој секоја цифра ја содржи точно двапати. Според тоа, збирот на цифрите на бројот pq е

$$2(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=90,$$

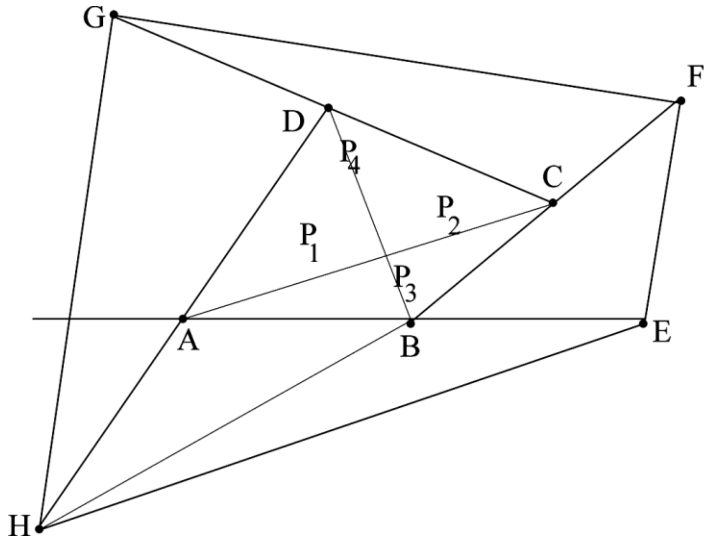
што значи дека тој е делив со 9. Меѓутоа, единствени прости делители на pq се p и q, од каде следува $p=q=3$. Последното противречи на условот $p\neq q$, од каде следува дека во записот на pq барем една цифра се јавува најмалку трипати.

Забелешка. Заклучокот $p=q=3$ противречи и на условот дека pq е дваесетцифрен број.

5. Дадени се четириаголниците $ABCD$ и $EFGH$, такви што точките B,C,D и A се средини на отсечките AE,BF,CG и DH, соодветно. Определи ја плоштината на четириаголникот $EFGH$, ако плоштината на четириаголникот $ABCD$ е $1cm^2$.

Решение. Нека $P_{\triangle ABD}=P_1$ и $P_{\triangle BCD}=P_2$. За триаголниците ABH и ABD важи $\overline{AD}=\overline{AH}$ и имаат заедничка висина повлечена од темето B, па затоа $P_{\triangle ABH}=P_{\triangle ABD}$. За триаголниците HBE и HAB важи $\overline{AB}=\overline{BE}$ и имаат заедничка висина повлечена од темето H, па затоа $P_{\triangle HBE}=P_{\triangle HAB}$. Значи

$$P_{\triangle AHE}=2P_{\triangle ABH}=2P_{\triangle ABD}=2P_1.$$



Аналогно се докажува дека $P_{\triangle CFG}=2P_2$.

Нека $P_{\triangle ABC}=P_3$ и $P_{\triangle ACD}=P_4$. На потполно аналоген начин, како и во претходните разгледувања се докажува дека $P_{\triangle BEF}=2P_3$ и $P_{\triangle DGH}=2P_4$.

Конечно, плоштината на четириаголникот $EFGH$ е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците AEH,BEF,CFG,DGH и четириаголникот $ABCD$, па затоа ако се искористи дека $P_1+P_2=P_3+P_4=1cm^2$ добиваме

$$P=2P_1+2P_2+2P_3+2P_4+1=2(P_1+P_2)+2(P_3+P_4)+1=2+2+1=5cm^2.$$