**Сојузен натпревар 1969**

**II година**

**1.** Која релација што не зависи од $m$ постои меѓу решенијата на равенката

$$(x^2-6x+5)+m(x^2-5x+6)=0\ ?$$

**Решение.** Ако $m\neq -1$, тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x^2-\tfrac{5m+6}{m+1}x+\tfrac{6m+5}{m+1}=0$$

и има решенија $x_1$ и $x_2$ за кои важи

$$x_1+x_2=\tfrac{5m+6}{m+1}=5+\tfrac{1}{m+1},$$
$$x_1x_2=\tfrac{6m+5}{m+1}=6-\tfrac{1}{m+1}.$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$x_1+x_2+x_1x_2=11.$$

**2.** Докажи дека за секој природен број $n$ барем еден од броевите $3^{3n}+2^{3n}$ и $3^{3n}-2^{3n}$ е делив со 35.

**Решение.** Ако $n=2k+1$, каде $k\in\{0,1,2,...\}$, тогаш

$$3^{3n}+2^{3n}=27^n+8^n=27^{3k+1}+8^{3k+1}=(27+8)\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i 27^{2k-i}8^i$$
$$=35\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i 27^{2k-i}8^i,$$

што значи $35\,|\,3^{3n}+2^{3n}$.

Ако $n=2k$, каде $k\in\{1,2,3,....\}$, тогаш

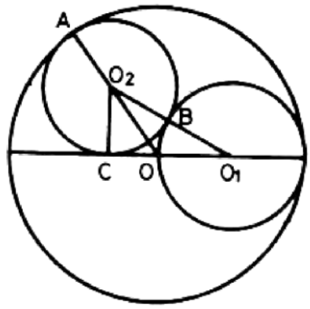
$$3^{3n}-2^{3n}=3^{6k}-2^{6k}=729^k-64^k=(729-64)\sum_{i=0}^{k-1}729^{k-1-i}64^i$$
$$=35\cdot 19\sum_{i=0}^{k-1}729^{k-1-i}64^i,$$

што значи $35\,|\,3^{3n}-2^{3n}$.

**3.** Дадени се две кружници со центри $O$ и $O_1$ и радиуси $R$ и $\frac{R}{2}$. Кружниците внатрешно се допираат во точката $T$. Конструирај кружница која ги допира дадените кружници и правата $OO_1$.

**Решение.** *Анализа.* Со $k$ и $k_1$ да ги означиме дадените кружници со центри $O$ и $O_1$. Нека претпоставиме дека кружницата $k_2$ со центар $O_2$ и радиус $x$ ги допира кружниците $k$ и $k_1$ и правата $OO_1$, редоследно во точките $A, B$ и $C$, (цртеж десно). Да означиме $OC = c$. Бидејќи

$O_1O_2 = \frac{R}{2} + x$, $OO_2 = R - x$, $O_2C = x$, $CO_1 = \frac{R}{2} + c$,




и бидејќи триаголниците $O_2CO$ и $O_2CO_1$ се правоаголни (со прави агли во темето $C$), од Питагоровата теорема следува

$$(\tfrac{R}{2} + c)^2 + x^2 = (\tfrac{R}{2} - c)^2,$$
$$c^2 + x^2 = (R - x)^2,$$

т.е.

$$Rc + c^2 = Rx, c^2 = R^2 - 2Rx.$$

Ако го елиминираме $c$ од овие равенства, добиваме $x = \frac{4R}{9}$. Да забележиме дека $O_1O_2 = \frac{17R}{18}, OO_2 = \frac{5R}{9}$.

*Конструкција.* Конструираме кружница $k_3$ со центар $O_1$ и радиус $\frac{17R}{18}$ и кружница $k_4$ со центар $O$ и радиус $\frac{5R}{9}$. Нека $O_2^{'}$ е пресек на кружниците $k_3$ и $k_4$. Конструираме кружница $k_2^{'}$ со центар $O_2^{'}$ и радиус $\frac{4R}{9}$. Тогаш $k_2^{'}$ е бараната кружница.

*Доказ.* Кружниците $k_3$ и $k_4$ се сечат бидејќи броевите $\frac{17R}{18}$, $\frac{5R}{9}$ и $\frac{R}{2}$ го задоволуваат потребниот и доволен услов да може да се страни на триаголник. Бидејќи $(\frac{17R}{18})^2 > (\frac{5R}{9})^2 + (\frac{R}{2})^2$, заклучуваме дека $O_1O_2^{'}O$ е тапоаголен триаголник со тап агол во темето $O$. Според тоа, точката $O$ се наоѓа меѓу точката $O_1$ и подножјето $C'$ на висината на триаголникот $O_1O_2^{'}O$ од темето $O_2^{'}$. Да означиме $C'O = c'$ и $C'O_2^{'} = h$. Бидејќи триаголниците $O_2^{'}C'O$ и $O_2^{'}C'O_1$ се правоаголни со прави агли во темето $C'$, важи

$$h^2 = (\tfrac{5R}{9})^2 - c'^2 = (\tfrac{17R}{18})^2 - (\tfrac{R}{2} + c')^2.$$

Понатаму, лесно добиваме $c' = \frac{R}{3}$ и $h = \frac{4R}{9}$, што значи дека кружницата $k_2^{'}$ ја допира правата $OO_1$. Од равенството

$$O_2^{'}O_1 = \tfrac{17R}{18} = \tfrac{R}{2} + \tfrac{4R}{9}$$

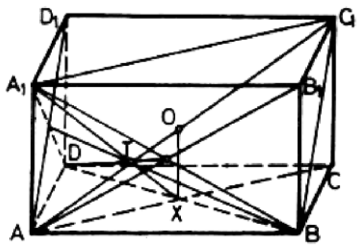
следува дека кружницата $k_2^{'}$ ја допира кружницата $k_1$. Бидејќи

$$O_2^{'}O = \sqrt{c'^2 + h^2} = \tfrac{5R}{9} = R - \tfrac{4R}{9},$$

заклучуваме дека кружниците $k_2^{'}$ и $k$ се допираат.

*Дискусија*. Кружниците $k_2^{'}$ и $k_1$ имаат две пресечни точки, што значи дека задачата има две решенија.

**4.** Во тристрана пирамида сите агли на бочните ѕидови при врвот на пирамидата се прави. Докажи дека врвот на пирамидата, тежиштето на основата и центарот на сферата опишана околу пирамидата припаѓаат на иста права.




**Решение.** Нека $ABDA_1$ е дадената пирамида и нека сите агли на бочните ѕидови во темето $A$ се прави. Понатаму, нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е паралелопипед (со еден ѕид $ABCD$ и рабови $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$), цртеж десно. Нека $O$ е средината на отсечката $AC_1$ и $T$ е тежиштето на триаголникот $A_1BD$. Тогаш $O$ е центарот на опишаната сфера околу паралелопипедот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (па според тоа и околу пирамидата $ABDA_1$). Правата $AC_1$ е пресек на рамнините $ABC_1D_1, ACC_1A_1$ и $ADC_1B_1$. Бидејќи средината $X$ на отсечката $BD$ припаѓа на правата $AC$, заклучуваме дека тежишната линија $A_1X$ на триаголникот $A_1BD$ припаѓа на рамнината $ACC_1A_1$. Слично се докажува дека и рамнините $ABC_1D_1$ и $ADC_1B_1$ содржат по една тежишна линија на триаголникот $A_1BD$. Според тоа, точката $T$ припаѓа на пресекот на овие три рамнини, т.е. на правата $AO$.

**III година**

**1.** Тристрана пирамида $OABC$ има бочни рабови $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, а аглите $AOB, BOC, COA$ се прави. Ако $\alpha, \beta, \gamma$ се аглите кај темињата $A, B, C$ на основата $ABC$, докажи дека

$$\operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma = a^2 : b^2 : c^2 .$$

**Решение.** Со примена на косинусната и Питагоровата теорема добиваме

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{a^2+b^2+a^2+c^2-b^2-c^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} .$$

Понатаму,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} .$$

Аналогно добиваме

$$\cos\beta = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{b^2+a^2}}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{b^2+a^2}} ,$$

па лесно следува дека

$$\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\beta}=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta\sin\alpha}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Слично се докажуваат останатите односи.

**2.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+...+x_n=1,\\&x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1,\\&..............................\\&x_1^n+x_2^n+...+x_n^n=1.\end{aligned}$$

**Решение.** Очигледно дека системот ги има следниве $n$ решенија:

$$(1,0,0,....,0,0),\ (0,1,0,....,0,0),\ ...,\ (0,0,0,...,0,1).$$

Ќе докажеме дека системот нема други решенија.

Нека $n=2$. Тогаш од $x_1+x_2=x_1^2+x_2^2=1$ следува

$$2x_1x_2=(x_1+x_2)-(x_1^2+x_2^2)=0,$$

па затоа еден од броевите $x_1$ и $x_2$ мора да е еднаков на 0, а другиот на 1.

Нека $n=3$. Тогаш од $x_1+x_2+x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_1^3+x_2^3+x_3^3=1$ и равенстата

$$\begin{aligned}&x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1),\\&x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)+3x_1x_2x_3,\end{aligned}$$

следува $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$ и $x_1x_2x_3=0$. Според тоа, барем еден од броевите $x_1,x_2,x_3$ е еднаков на 0, па аналогно како во претходниот случај добиваме дека и еден од преостанатите два броја е еднаков на 0, а другиот е еднаков на 1.

Нека $n\geq 4$. Тогаш од равенството $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1$ следува

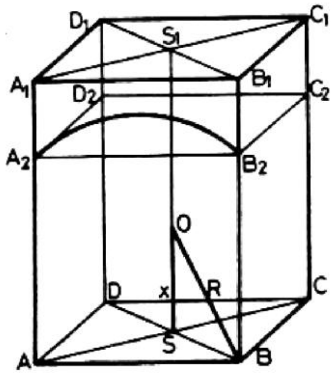
$$x_1^2\leq 1,\ x_2^2\leq 1,\ ...,\ x_n^2\leq 1.$$

Ако некој од броевите $x_1^2,x_2^2,...,x_n^2$ (на пример $x_1^2$) е еднаков на 1, тогаш секој од броевите $x_2^2,...,x_n^2$ е еднаков на 0, т.е. секој од броевите $x_2,...,x_n$ е еднаков на 0, па од условот $x_1+x_2+...+x_n=1$ следува $x_1=1$. Ако $x_1^2<1,\ x_2^2<1,\ ...,\ x_n^2<1$, тогаш

$$1=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2>x_1^4+x_2^4+...+x_n^4=1,$$

што е противречност, т.е. $n-$торката $(x_1,x_2,...,x_n)$ не е решение на системот.

**3.** Дадена е правилна четиристрана призма со основен раб $2a$ и висина $a(1+\sqrt{3})$. Една сфера минува низ четирите темиња на долната основа и ја допира горната основа. Определи ја плоштината на оној дел од призмата кој е внатре во сферата.




**Решение.** Нека $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ се темињата на дадената призма, при што основата е квадратот $ABCD$ со страна $2a$, а $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ се рабови на призмата со должина $a(1+\sqrt{3})$. Понатаму, нека $S$ е пресекот на дијагоналите на квадратот $ABCD$, $S_1$ е пресекот на дијагоналите на квадратот $A_1B_1C_1D_1$, $O$ и $R$ се соодветно центарот и радиусот на дадената сфера и $x = OS$ (цртеж десно). Триаголникот $OSB$ е правоаголен со прав агол во темето $S$, па затоа

$$S_1S - S_1O = x = \sqrt{OB^2 - BS^2},$$
$$((1+\sqrt{3})a - R)^2 = R^2 - 2a^2,$$
$$R = a\sqrt{3},$$
$$x = a.$$

Ако $A_2, B_2, C_2, D_2$ се редоследно точки на рабовите $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ такви што $AA_2 = BB_2 = CC_2 = DD_2 = 2a$, тогаш $ABCDA_2B_2C_2D_2$ е коцка, а дадената сфера е опишана околу таа коцка. Делот од плоштината на ѕидот $ABB_1A_1$ на призмата кој се наоѓа внатре во кружницата опишана околу квадратот $ABB_2A_2$ е еднаков на

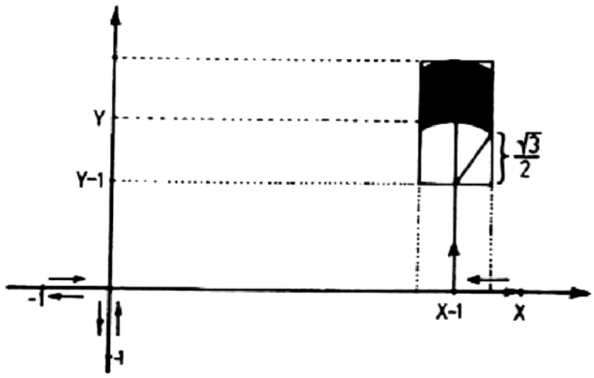
$$(2a)^2 + \tfrac{1}{4}((a\sqrt{2})^2\pi - (2a)^2) = \tfrac{a^2\pi}{2} + 3a^2.$$

Делот од плоштината на призмата кој се наоѓа во внатрешноста на сферата е еднаков на

$$4(\tfrac{a^2\pi}{2} + 3a^2) + 4a^2 = 2a^2(8+\pi).$$

**4.** Некој кратковид мудрец кој гледа предмети само на растојание помало од $1m$, направил ваква оклада: Ако било каде на растојание $d$ од него се постави некој предмет, тогаш тој (под услов по секој направен чекор од $1m$ да му се каже дали на тој начин се приближил или се оддалечил од предметот) во конечно многу чекори ќе го најде предметот, а бројот на направените чекори ќе биде сигурно помал од $\frac{3d}{2}+7$. Се смета дека предметот е најден, тогаш кога мудрецот ќе го здогледа. Докажи дека мудрецот ќе ја добие опкладата.

**Решение.** Да воведеме правоаголен координатен систем така што мудрецот ќе се наоѓа во координатниот почеток. Нека предметот се наоѓа во точката $(x_0, y_0)$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $x_0 \ge 0, y_0 \ge 0$. Мудрецот може да го бара предметот на следниов начин:




1) Прво со најмногу 4 чекори го наоѓа квадрантот во кој се наоѓа предметот (поточно, квадрантот во кој предметот се наоѓа или од кој е оддалеченм помалку од $\frac{1}{2}$ ), цртеж десно.

2) Потоа се движи по оној дел на $x-$оската кој не граница на најдениот квадрант, се додека не почне да се оддалечува од предметот (на пример $x$ чекори), па потоа ќе се врати еден чекор назад. Притоа важи $x-\frac{3}{2}\le x_0\le x-\frac{1}{2}$ .

3) Потоа во воочениот квадрант се движи паралелно на $y-$оската ( $y$ чекори) се додека не го здогледа предметот. Притоа важи

$$y-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\le y_0\le y+1\,.$$

Вкупниот број чекори е најмногу $A=4+x+1+y$ , па имаме

$$\begin{aligned}A&=5+x+y\le 5+x_0+\tfrac{3}{2}+y_0+1-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\&=x_0+y_0+7-\tfrac{1-\sqrt{3}}{2}<\sqrt{2}d+7<\tfrac{3}{2}d+7.\end{aligned}$$

Во претпоследното неравенство го користевме тврдењето: Ако за позитивните броеви $a$ и $b$ важи $a^2+b^2<d^2$ и $\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ , тогаш

$$a+b<d(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{2}d\cos(\tfrac{\pi}{4}-\alpha)<\sqrt{2}d\,.$$

**IV година**

**1.** Иста како 4-тата задача од III година.

**2.** Ако $p$ е непарен прост број и $a$ е цел број кој не е делив со $p$, тогаш еден и само еден од броевите

$$A=a^{1+2+...+(p-1)}+1,\;B=a^{1+2+...+(p-1)}-1$$

е делив со $p$. Докажи!

**Решение.** Имаме

$$A-B=2 \text{ и } AB=(a^p)^{p-1}-1\,.$$

Бидејќи $p$ е прост број поголем од 2, бројот $A-B$ не е делив со $p$, па затоа двата броја $A$ и $B$ не може да се деливи со $p$. Но, од малата теорема на Ферма следува дека бројот $AB$ е делив со $p$, па затоа точно еден од броевите $A$ и $B$ е делив со $p$.

**3.** Во заедничкиот дел на внатрешните области на параболите

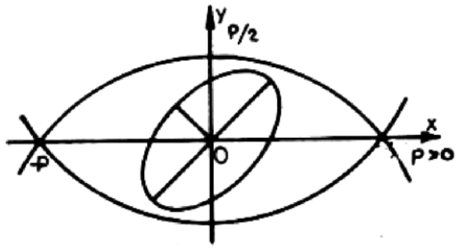
$$x^2 = p^2 + 2py \text{ и } x^2 = p^2 - 2py$$

впиши елипса со максимална плоштина.

**Решение.** Ако елипсата се наоѓа внатре во областа ограничена со параболите

$$x^2 = p^2 + 2py \text{ и } x^2 = p^2 - 2py,$$

каде, на пример, $p > 0$, цртеж десно, тогаш со транслација на елипсата така што пресекот на оските ќе и се поклопи со координатниот почеток, а потоа со ротација околу координатниот почеток така што големата оска на елипсата ќе падне на $x-$оската, ќе се добие елипса која е внатре во споменатата област (Докажи!).




Равенката на бараната елипса со максимална плоштина има облик

$$\frac{x^2}{\lambda^2 b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

каде $0 < b \le \frac{p}{2}$. Елипсата (1) целосно се содржи во дадената област ако и само ако за секој $y \in (0, b]$ важи

$$x_p^2 - x_e^2 = p^2 - 2py - (\lambda^2 b^2 - \lambda^2 y^2) \ge 0, \tag{2}$$

каде $x_p$ и $x_e$ се соодветно апцисите на точките на параболата и елипсата кои имаат иста ордината. Притоа, кај елипсата која има максимална плоштина за некој $y_0 \in (0, b]$ важи $x_p^2 - x_e^2 = 0$. Ако $y_0 = b$, тогаш е $y_0 = b = \frac{p}{2}$, а ординатата на темето на параболата

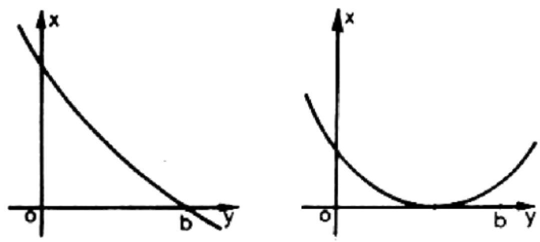
$$x = \lambda^2 y^2 - 2py + p^2 - \lambda^2 b^2 \tag{3}$$

не е помала од $b$ (цртеж десно). Значи,

$$y_T = \frac{p}{\lambda^2} \ge b = \frac{p}{2},$$

од каде следува $\lambda^2 \le 2$. Максималната плоштина е

$$P_1 = \pi \lambda b^2 = \frac{\pi p^2}{2\sqrt{2}}.$$




Ако $0 < y_0 < b$, тогаш координатите на темето на параболата (3) се

$$y_0 = \frac{p}{\lambda^2},\ x_0 = p^2 - \lambda^2 b^2 - \frac{p^2}{\lambda^2} = 0\,,$$

од каде имаме две можности за $\lambda^2$:

$$\lambda_1^2 = \frac{p^2}{2b^2}(p - \sqrt{p^2 - 4b^2}),\ \lambda_2^2 = \frac{p^2}{2b^2}(p + \sqrt{p^2 - 4b^2})\,.$$

Бидејќи $\frac{p}{\lambda_1^2} > b$ и $\frac{p}{\lambda_2^2} < b$, мора да е $\lambda = \lambda_2$. Плоштината на соодветна елипса е $P_2 = \pi\lambda b^2$, па следува

$$P_2^2 = \pi^2 \lambda^2 b^4 = \frac{\pi^2 p^2}{2} b^2 (p + \sqrt{p^2 - 4b^2})\,.$$

Функцијата $f(b^2) = b^2(p + \sqrt{p^2 - 4b^2})$ достигнува максимум за $b^2 = \frac{2p^2}{9}$. Тогаш $\lambda^2 = 3$ и $P_2 = \frac{2\pi p^2}{3\sqrt{3}} > P_1$. Бараната елипса е

$$\frac{x^2}{\frac{2p^2}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2p^2}{9}} = 1\,.$$

**4.** Ако $a$ е реален параметар, определи ги сите реални решенија на системот равенки

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + ... + x_n = a, \\ &x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = a^2, \\ &.............................. \\ &x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = a^n. \end{aligned}$$

**Решение.** Ако $a = 0$, тогаш системот има единствено решение

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0\,.$$

Ако $a \neq 0$, тогаш аналогно како во задачата 2 за трета година докажуваме дека

$$(a,0,0,...,0,0),\ (0,a,0,...,0,0), ..., (0,0,0,...,0,a)$$

се сите решенија на дадениот систем.

**Мала олимпијада**

**1.** Дадени се реални броеви $a_i, b_i\ (i = 1,2,...,n)$ такви што

$$\begin{aligned} &a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0, \\ &b_1 \geq a_1, \\ &b_1 b_2 \geq a_1 a_2, \\ &........................ \\ &b_1 b_2 ... b_n \geq a_1 a_2 ... a_n \end{aligned}$$

Докажи дека

$$b_1+b_2+...+b_n \ge a_1+a_2+...+a_n .$$

**Решение.** Да означиме $\frac{b_i}{a_i}=\lambda_i$. Од условот на задачата следува $\lambda_i>0$, за $i=1,2,...,n$ и

$$\lambda_1 \ge 1,\ \lambda_1\lambda_2 \ge 1,...,\lambda_1\lambda_2...\lambda_n \ge 1, \qquad (1)$$

а, како $b_i-a_i=(\lambda_i-1)a_i$, треба да се докаже

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-1)a_i \ge 0 .$$

Од неравенствата (1) и неравенствата меѓу средините следува

$$\lambda_1 \ge 1,\ \lambda_1+\lambda_2 \ge 2,...,\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n \ge n .$$

Ако ги воведеме ознаките $\lambda_i-1=\mu_i$, $i=1,2,...,n$, тогаш имаме

$$a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n > 0,$$

$$\mu_1 \ge 0,\ \mu_1+\mu_2 \ge 0,...,\mu_1+\mu_2+...+\mu_n \ge 0,$$

а треба да се докаже

$$\mu_1a_1+\mu_2a_2+...+\mu_na_n \ge 0.$$

Последното неравенство следува од

$$\begin{aligned}\mu_1a_1+\mu_2a_2+...+\mu_na_n &= \mu_1(a_1-a_2)+(\mu_1+\mu_2)(a_2-a_3)+...\\ &+(\mu_1+\mu_2+...+\mu_{n-1})(a_{n-1}-a_n)+(\mu_1+\mu_2+...+\mu_n)a_n\\ &\ge 0.\end{aligned}$$

**2.** Нека $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми со степен $n$, а $x_0,x_1,...,x_n$ се $n+1$ различни вредности на променливата $x$. Ако

$$f(x_0)=g(x_0), f'(x_1)=g'(x_1), f''(x_2)=g''(x_2),..., f^{(n)}(x_n)=g^{(n)}(x_n),$$

докажи дека $f(x)\equiv g(x)$.

**Решение.** Да означиме $h(x)=f(x)-g(x)$. Тогаш $h(x)$ е полином од степен помал или еднаков на $n$ за кој

$$h(x_0)=h'(x_1)=h''(x_2)=...=h^{(n)}(x_n)=0, \qquad (1)$$

а треба да да докажеме дека $h(x)\equiv 0$. Сега, ако

$$h(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n ,$$

каде коефициентите тогаш $a_i, i=0,1,2,...,n$ треба да ги определиме, тогаш од (1) следува системот

$$\begin{aligned}h(x_0) &= a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+...+a_nx_0^n=0\\ h'(x_1) &= \quad a_1+2a_2x_1+...+na_nx_1^{n-1}=0\\ h''(x_2) &= \qquad 2a_2+...+n(n-1)x_2^{n-2}=0\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

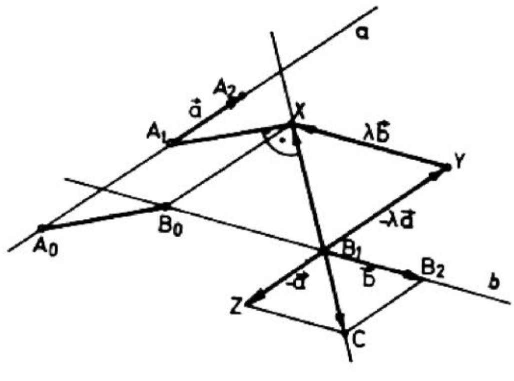
$$h^{(n-1)}(x_{n-1}) = \qquad (n-1)!a_{n-1} + n!a_n x_{n-1} = 0$$
$$h^{(n)}(x_n) = \qquad n!a_n = 0$$

чие решение е $a_i = 0, i = 0,1,2,...,n$. Според тоа, сите коефициенти на полиномот $h(x)$ се еднакви на 0, па затоа $h(x) \equiv 0$.

**3.** Точките $A$ и $B$ се движат со константни брзини по правите $a$ и $b$, а познати се и по две соодветни положби $A_1, B_1$ и $A_2, B_2$. Определи ја онаа положба на точките $A$ и $B$ за кои должината $AB$ е најмала.

**Решение.** Векторите $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{B_1B_2}$ се соодветно вектори на брзините на точките $A$ и $B$. За набљудувач од точката $A$ точката $B$ се движи со брзина која е определена со векторот $\vec{b} - \vec{a}$. Нека $Z$ и $C$ се точки определени со

$$\overrightarrow{B_1Z} = -\vec{a}, \ \overrightarrow{B_1C} = \vec{b} - \vec{a}.$$




Минималното растојание меѓу точките $A$ и $B$ при движењето е еднакво на $A_1X$, каде $X$ е пресекот на правата $B_1C$ со нормалата на таа права која ја содржи точката $A_1$, цртеж десно. Нека $\overrightarrow{B_1X} = \lambda \overrightarrow{B_1C} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ и нека $A_0$ и $B_0$ се точките определени со $\overrightarrow{A_1A_0} = \lambda \vec{a}$, $\overrightarrow{B_1B_0} = \lambda \vec{b}$. Јасно, точките $A_0$ и $B_0$ се соодветни положби на точките $A$ и $B$ при разгледуваното движење. Бидејќи

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_0B_0} &= \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1X} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{B_1B_0} \\ &= -\lambda \vec{a} + \overrightarrow{A_1X} - \lambda(\vec{b} - \vec{a}) + \lambda \vec{b} = \overrightarrow{A_1X}\end{aligned}$$

заклучуваме дека $A_0$ и $B_0$ се положбите на точките $A$ и $B$ во моментот кога растојанието меѓу нив е минимално.

**4.** Нека $a$ и $b$ се природни броеви такви што $a < b$. Докажи дека во секое множество од $b$ последователни природни броеви постојат два броја чиј производ е делив со $ab$.

**Решение.** Нека $\{x_1, x_2, ..., x_b\}$ е множество од $b$ последователни природни броеви. Тогаш меѓу нив се наоѓа број $x_i$ кој е делив со $b$, а како $a < b$, постои и број $x_j$ кој е делив со $a$. Ако $i \neq j$, тогаш производот $x_i x_j$ е делив со $ab$.

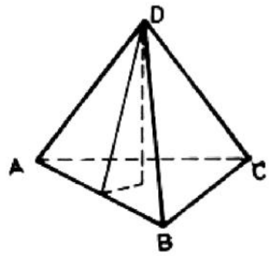
Да претпоставиме дека $i = j$. Со $d$ да го означиме најголемиот заеднички делител на броевите $a$ и $b$, а со $s$ нивниот најмал заеднички содржател. Тогаш

$ds = ab$ и $s \mid x_i$. Ќе докажеме дека дека барем еден од броевите $x_i + d$ и $x_i - d$ (кои се деливи со $d$) припаѓаат на множеството $\{x_1, x_2, ..., x_b\}$. Ако тоа не е точно, тогаш $x_i + d > x_b$ и $x_i - d < x_1$, па затоа ќе важи $2d > x_b - x_1 + 1 = b$. Но, како $d \mid b$, тоа ќе значи дека $d = b > a$, па не може да е $d \mid a$, што противречи на дефиницијата на $a$.

Нека, на пример, $x_i + d \in \{x_1, x_2, ..., x_b\}$. Тогаш производот $x_i(x_i + d)$ е делив со $ds = ab$.

**5.** Производот на синусите на два спротивни диедри во тетраедарот е пропорционален со производот на рабовите на тие диедри. Докажи!

**Решение.** Ќе ја користиме ознаката $\sin(AB)$ за синусот на диедарот со раб $AB$ кај тетраедарот $ABCD$, како и аналогните ознаки во случај со останатите диедри. Нека $V$ е волуменот на тетраедарот. Тогаш




$$V = \frac{1}{3} P_{ABC} \frac{2P_{ABD}}{AB} \sin(AB)$$
$$= \frac{1}{3} P_{BCD} \frac{2P_{ACD}}{CD} \sin(CD)$$

од каде добиваме

$$\frac{AB \cdot CD}{\sin(AB)\sin(CD)} = \frac{4P_{ABC}P_{ABD}P_{BCD}P_{ACD}}{9V^2}.$$

**6.** Нека $E$ е множество од $n^2 + 1$ затворени интервали на реалната оска. Докажи дека постои негово подмножество од $n+1$ интервал кои се монотоно подредени во однос на релацијата инклузија или подмножество од $n+1$ интервал од кои ниту еден не содржи ниту еден друг интервал од тоа подмножество.

**Решение.** Нека $A$ е еден од дадените интервали. Дефинираме карактеристика $r(A)$ на тој интервал на следниот начин: $r(A)$ е најголемиот природен број $r$, таков што множеството $E$ содржи интервали $I_1, I_2, ..., I_{r-1}, I_r = A$ за кои важи

$$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_{r-1} \subset I_r = A.$$

Да забележиме дека ако за два интервали $A$ и $B$ важи $r = r(A) = r(B)$, тогаш ниту еден од нив не е подмножество на другиот. Во спротивно, на пример, ако $A \subset B$ и освен тоа постојат интервали $I_1, I_2, ..., I_{r-1}$ сите различни од $A$ и $B$ и такви што важи

$$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_{r-1} \subset A \subset B,$$

па оттука следува $r(B) \geq r+1$, што е противречност.

Ако некој од интервалите има карактеристика поголема од $n$, тогаш тврдењето е докажано. Во спротивно, карактеристиката на секој интервал е број од множеството $\{1,2,...,n\}$. Но, множеството $E$ има $n^2+1$ интервал, па од принципот на Дирихле следува дека барем $n+1$ од овие интервали имаат еднаква карактеристика. Тогаш ниту еден од овие $n+1$ интервали не е подмножество на некој друг интервал од истите $n+1$ интервали.