Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус

Вангел Каруловски
Душко Ачовски
Скопје

ПРЕСЛИКУВАЊЕ ИЛИ ФУНКЦИИ

Поимот функција е важен поим во математиката. Тој поим ви е познат од наставата по математика, почнувајќи од V одделение. Тргнувајќи од важноста на поимот функција, со циклусот написи ќе се обидеме да ги прошириме и да ги продлабочиме за тој поим, за да го сфатиме новото вистинско значење.

Нека се дадени две непразни множества E и F и една релација f во која секој елемент $x \in E$ е во релација само со еден елемент $y \in F$, тогаш велиме дека f е функција (пресликување) од множеството E во множеството F и пишуваме:

$$f : E \to F$$

Множеството E се вика домен (дефинициона област(на функцијата, а множеството F кодомен (област на промената). Елементот $x \in E$ се вика оригинал или аргумент, а соодветниот елемент $y \in F$ (или $f(x) \in F$) се вика слика или вредност на функцијата. Множеството до сите слики ќе го обележуваме со $f(E)$, очигледно е дека $f(E) \subseteq F$.

Ако множествата E и F се еднакви со множеството на реалните броеви R (или се еднакви со некое подмножество од R), тогаш велиме дека f е реална функција од реален аргумент и пишуваме:

$$f : R \to R \quad \text{или} \quad f : D \to R (D \subset R).$$

Ние по правило ќе работиме со реални функции од реален аргумент.

Треба да напомeнеме дека симболите f, $f(E)$ и $f(x)$ немаат исто значење. Првиот ја означува функцијата, вториот множеството слики, а третиот сликата (вредноста) на функцијата.

$f(x) \in F$ или поточно $f(x) \in (E)$ ако и само ако постои елемент $x \in E$, но таков што да е $u = f(x)$.

Да го разгледаме тоа на следниов пример:

Нека е $E = \{1,2,3\} \subset R$ и $F = \{1,2,3,4,5\} \subset R$. Ќе ја разгледаме функцијата $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ зададена со формулата $f(x) = x+1$.

За $x \in E$ се добива сликата $f(x) = x+1$ и $(x+1) \in F$ конкретно.

За $x = 1$ '' '' $f(1) = 1+1 = 2$.

За $x = 2$ '' '' $f(2) = 2+1 = 3$.

За $x = 3$ '' '' $f(3) = 3+1 = 4$.

Множеството од сликите е:

$f(E) = f(\{1,2,3\}) = \{2,3,4\}$

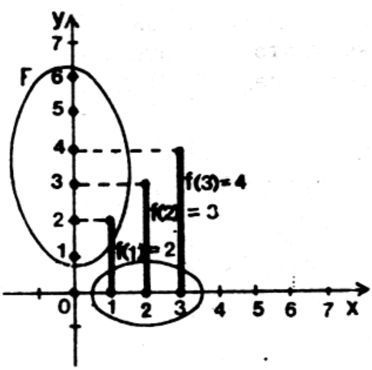
$\{2,3,4\} \subset F = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Оваа функција ќе ја претставиме графички во координатниот систем xOy дефиниран со две нормални бројни оски со заеднички почеток и со иста единица на два начина, и тоа:

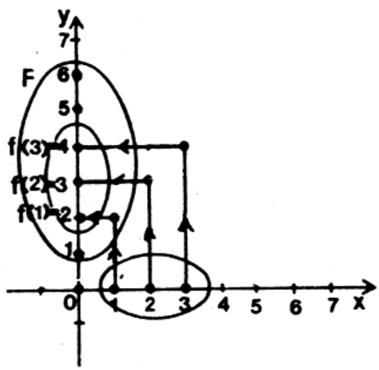
1. Вредностите на функцијата како ординати во графикот и

2. Вредностите на функцијата како слики што се наоѓаат во кодоменот.

На Ox-оската, ќе ги означиме елементите на доменот E, а на Oy-оската елементите на кодоменот F.



Црт. 1



Црт. 2

На црт. 1 вредностите на функцијата се прикажани како ординати во графикот, а на црт. 2 вредностите на функцијата како слики што се наоѓаат во кодоменот F.

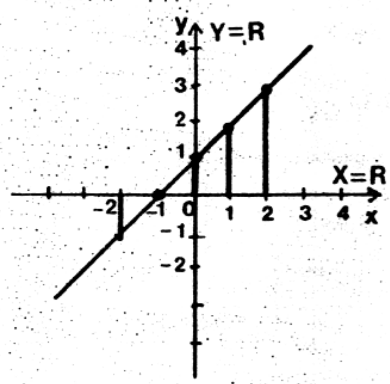
Секако уочивте дека постои разлика во толкувањето на вредностите на функцијата како ординати и како слики, иако за обете користиме една иста ознака $f(u)$. Во првиот случај, на пример $f(2) = 3$, вредноста на функцијата е ордината, а во вториот случај таа е слика (точка) што се наоѓа во кодоменот F.

Претстави ги графички на два начина:

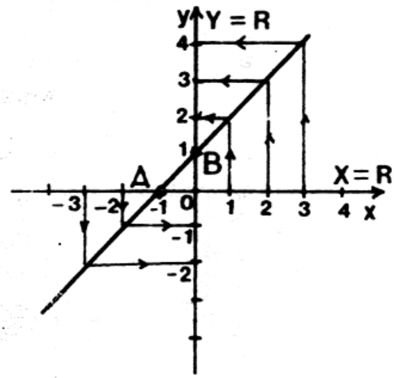
1. $E = \{1,2,3\}$; $F_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ и $f(x) = 2x-1$;
2. $E = \{1,2,3\}$; $F_2 = \{1,2,3,6,9\}$ и $f(x) = 3(x-1)$;
3. $E = \{1,2,3\}$; $F_3 = \{3,4,5,6,7,8\}$ и $f(x) = 2x+1$.

Пример 2. Да го нацртаме графикот на реалната функција од реален аргумент $f: R \to R$, зададена со формулата $f(x) = x+1$.

За да го нацртаме графикот на дадената функција, ќе направиме делумна табела за вредностите на аргументот и вредностите на функцијата. Сврзувајќи ги крајните точки на ординатите во координатниот систем, ќе го добиеме графикот на дадената линеарна функција:



Црт. 3



Црт. 4

Познато ви е дека графикот на секоја линеарна функција, па и на дадената, може да се нацрта само со помош на две точки. Најпогодни точки за тоа се точките во кои правата ги сече координатните оски, а во нашиот пример тоа се точките:

За $f(x) = 0$, $x+1 = 0$, $x = -1$; A(-1,0).

За $x = 0$, $f(0) - 0+1$; B(0,1).

На овој график се прикажани вредностите на функцијата како слики, кои што се наоѓаат во кодоменот, само за некои дадени вредности на аргументот. Така со

$x = \frac{1}{2} \in R$ се пресликува во $f(1\frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2}+1 = 2\frac{1}{2} \in R$.

Со f интервалот, $[3,4] \in R$ се пресликува во интервалот $[4,5] \in R$, т.е. $f([3,4\}) = [4,5]$.

Лесно се уочува дека со $f: (-\infty,-3)$ се пресликува во $(-\infty,-2)$

т.е. $f((-\infty, -3)) = (-\infty, -2)$,

$f[0,+\infty)$, се пресликува во $[0,+\infty]$,

т.е. $f([0,+\infty)) = [0,+\infty)$;

$f(-\infty,+\infty)$ се пресликува во $(-\infty,+\infty)$

т.е. $f((-\infty,+\infty)) = (-\infty,+\infty)$.

Толкувањето на вредностите на функцијата како ординати е погодно за примена при графичкото претставување на функциите. Толкувањето на вредностите на функцијата како слика, погодно е за примена при дефинирањето на видовите функции.

Претстави ги графички на два начина:

1. $E = \{1,2,3\}$; $F_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ и $f(x) = 2x-1$;
2. $E = \{1,2,3\}$; $F_2 = \{0,2,3,6,9\}$ и $f(x) = 3(x-1)$;
3. $E = \{1,2,3\}$; $F_3 = \{3,4,5,6,7,8\}$ и $f(x) = 2x+1$.