M. Živković (Beograd)

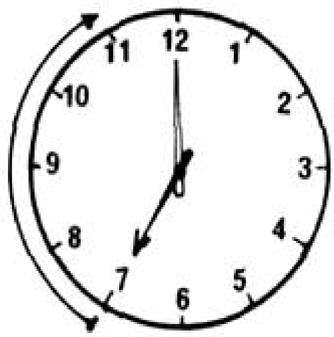
ARITMETIKA ČASOVNIKA

1. Na časovniku su časovi, obično, označeni prirodnim brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, tj. elementima skupa brojeva

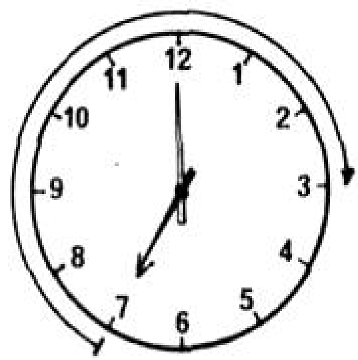
$$H=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Sa ovim brojevima često izvodimo računsku radnju »sabiranje na časovniku«. Tako, na primer, ako Marko pođe na put kada časovnik pokazuje 7 časova i ako do cilja treba da putuje 4 časa, onda će on, kao što pokazuje sl. 1, stići na cilj kada časovnik pokazuje 11 časova, jer je

$$7+4=11.$$



Sl. 1



Sl. 2

Međutim, ako Ivan pođe na put kada časovnik pokazuje 7 časova i ako do cilja treba da putuje 8 časova, onda će on, kao što pokazuje sl. 2, stići na cilj kada časovnik pokazuje 3 časa. Prema tome, u ovom slučaju je za »sabiranje na časovniku« tačno tvrđenje (ili, kako se još kaže, istinit iskaz)

$$7+8=3.$$

Slično tome, putem »sabiranja na časovniku« nalazimo da je, na primer:

$$9+2=11, \qquad 9+4=1,$$

$$9+3=12, \qquad 9+5=2, \text{ itd.,}$$

odakle nije teško zaključiti da, ako se radi o prirodnim brojevima čiji je zbir manji od 12 ili jednak 12, tada je »sabiranje na časovniku« isto kao i obično sabiranje, a ako se radi o sabiranju prirodnih brojeva čiji je zbir veći od 12, tada »sabiranje na časovniku« nije isto što i obično sabiranje. Stoga, da bismo ovo sabiranje razlikovali od običnog sabiranja (za koje se upotrebljava znak $+$), mi ćemo za »sabiranje na časovniku« upotrebljavati znak $\oplus$; koristeći se time, prethodne iskaze napisaćemo na sledeći način:

$$7\oplus4=11, \qquad 7\oplus8=3, \qquad 9\oplus2=11,$$

$$9\oplus3=12, \qquad 9\oplus4=1, \qquad 9\oplus5=2.$$

Za »sabiranje na časovniku«, od osno za računsku radnju $\oplus$, važi sledeća tablica:

$\oplus$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Na osnovu toga, računska radnja $\oplus$ određuje se pomoću računske radnje $+$ na sledeći način:

Za sve brojeve a i b iz skupa H dobija se broj $a \oplus b$ koji je takođe u skupu H, i to:

$$a\oplus b=a+b \qquad \text{ako je} \quad a+b<12,$$

$$a\oplus b=a+b-12 \quad \text{ako je} \quad a+b>12.$$

Zapazimo de je za »sabiranje na časovniku«, tj. za računsku radnju $\oplus$, karakteristično to da je, za bilo koji broj a iz skupa H, uvek

$$a\oplus12=a,$$

što znači da se u tom neobičnom sabiranju broj 12 ponaša kao 0 u običnom sabiranju. — Inače, prethodna tablica nam može pokazati da, dodajući broju a broj b dobijamo isti zbir kao i kada broju b dodajemo broj a; na primer:

$$6 \oplus 8 = 8 \oplus 6 = 2.$$

Isto tako, je, na primer,

$$(5 \oplus 9) \oplus 6 = 5 \oplus (9 \oplus 6),$$

što znači da se rezultat »sabiranja na časovniku« neće promeniti ako se poredak sabiraka promeni ili ako se sabirci po volji spajaju u grupe, a to su, kao što znamo, i svojstva običnog sabiranja.

2. Pored sabiranja, na časovniku možemo izvoditi i oduzimanje brojeva iz skupa H; računsku radnju »oduzimanje na časovniku« obeležavaćemo znakom $\ominus$. I kao što je, kod običnog oduzimanja, razlika dvaju brojeva a i b treći broj (koji obeležavamo sa $a - b$) kojem treba dodati broj b da bi se dobio broj a, na primer: razlika brojeva 11 i 5 je broj 11—5 kojem treba dodati broj 5 da bi se dobio broj 11:

$$11 - 5 = 6, \qquad 6 + 5 = 11,$$

to jest,

$$(a - b) + b = a,$$

tako isto je, na časovniku,

$$(a - b) + b = a;$$

na primer,

$$3 \ominus 8 = 7$$

jer je, prema tablici »sabiranja na časovniku«, $7 \oplus 8 = 3$. Međutim, dok je kod običnog oduzimanja razlika dvaju jednakih brojeva jednaka 0, dotle je kod »oduzimanja na časovniku« razlike dvaju jednakih brojeva jednaka 12, na primer:

$$4 \ominus 4 = 12, \qquad 11 \ominus 11 = 12, \qquad 12 \ominus 12 = 12,$$

i uopšte za svaki broj a iz skupa H je

$$a \ominus a = 12.$$

Sada možemo izvršiti sledeća izračunavanja:

1) $(7 \oplus 12 \ominus 5) \ominus (3 \ominus 10) = (7 \ominus 5) \ominus 5 = 2 \ominus 5 = 9;$

2) $2(5 \oplus 8) = (5 \oplus 8) + (5 \oplus 8) = 1 + 1 = 2.$

3. U ovoj neobičnoj aritmetici može se izvoditi i »množenje na časovniku«. Za tu računsku radnju sa brojevima iz skupa H, koju ćemo obeležavati znakom $\odot$, imamo sledeću tablicu:

$\odot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	3	6	9	12	3	6	9	12
4	5	8	12	4	8	12	4	8	12	4	8	12
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12
6	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12	6	12
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
8	8	4	12	8	4	12	8	4	12	8	4	12
9	9	6	3	12	9	6	3	12	9	6	3	12
10	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2	12
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

Na osnovu ove tablice odgovorite na sledeća pitanja:

1) Da li se, prilikom množenja dvaju brojeva na časovniku, tj. prilikom izvođenja računske radnje $\odot$, poredak činilaca sme promeniti? drugim rečima, da li je, na primer,

$$7 \odot 9 = 9 \odot 7?$$

2) Da li se, prilikom izvođenja računske radnje $\odot$ sa tri ili više brojeva iz skupa H, činioci smeju po volju spajati u grupe, tj. da li je, na primer,

$$(5 \odot 8) \odot 11 = 5 \odot (8 \odot 11)?$$

3) Da li je

$$(3 \oplus 10) \odot 11 = (3 \odot 11) \oplus (10 \odot 11)?$$

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија