БМО 1997

1. Нека O е внатрешна точка на конвексен четириаголник $ABCD$ со плоштина P таква што $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2=2P$. Докажи, дека $ABCD$ е квадрат со центар O.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}4P_{ABCD}&=4(P_{AOB}+P_{BOC}+P_{COD}+P_{DOA})\\&=2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin\measuredangle AOB+2\overline{OB}\cdot\overline{OC}\sin\measuredangle BOC\\&\quad+2\overline{OC}\cdot\overline{OD}\sin\measuredangle COD+2\overline{OD}\cdot\overline{OA}\sin\measuredangle DOA\\&\leq(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2)+(\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)+(\overline{OC}^2+\overline{OD}^2)+(\overline{OD}^2+\overline{OA}^2)\\&=4P=4P_{ABCD}.\end{aligned}$$

Тогаш од горното неравенство следува дека $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$ и четирите синуси се еднакви на 1. Според тоа, четириаголникот $ABCD$ е квадрат со центар O.

2. Нека S е множество со $n\geq 2$ елементи и $A_1,A_2,...,A_m$ $(m\geq 2)$ се подмножества од S со следново својство: за секои два различни елементи x и y од S постои подмножество A_i кое содржи точно еден од овие два елементи. Докажи дека $2^m\geq n$.

Решение. *Прв начин*. Нека $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ и $x_i\in A_{i_1},A_{i_2},...,A_{i_{k(i)}}$. Од условот следува дека ако $i\neq j$, тогаш

$$\{A_{i_1},A_{i_2},...,A_{i_{k(i)}}\}\neq\{A_{i_1},A_{i_2},...,A_{j_{k(j)}}\}.$$

Бројот на сите подмножества на множеството $\{A_1,A_2,...,A_m\}$ е еднаков на 2^m и овој број не е помал од бројот на елементите на S.

Втор начин. На секој елемент a од множеството S му придружуваме низа од нули и единици $[a]=(x_1,...,x_k)$, каде $x_i=1$ ако $a\in A_i$ и $x_i=0$ ако $a\notin A_i$. Според условот на задачата сите низи $[a]$ се различни. Но, низи со должина m има 2^m, па затоа $2^m\geq n$.

3. Нека C_1 и C_2 се две кружници, кои надворешно се допираат во точка D, а Γ е кружница која C_1 и C_2 внатрешно ја допираат соодветно во точки B и C. Со A да ја означиме едната од двете пресечни точки на Γ со заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката D. Ако K и L се пресечните точки на AB и AC соодветно со C_1 и C_2, а M и N се пресечните точки на BC соодветно со C_1 и C_2, докажи дека правите AD, KM и LN се сечат во една точка.

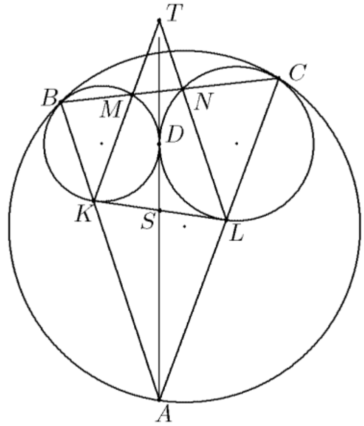
Решение. *Прв начин*. Нека i е инверзија со центар A и радиус AD. Бидејќи $i(C_1)=C_1$, $i(C_2)=C_2$, $i(B)=K$, $i(C)=L$ и $i(\Gamma)=KL$, заклучуваме дека KL е заедничка тангента на C_1 и C_2. Од друга страна,

$$\overline{AK}\cdot\overline{AB}=\overline{AD}^2=\overline{AL}\cdot\overline{AC},$$

па затоа четириаголникот $BCLK$ е тетивен. Ако $T=KM\cap LN$, тогаш

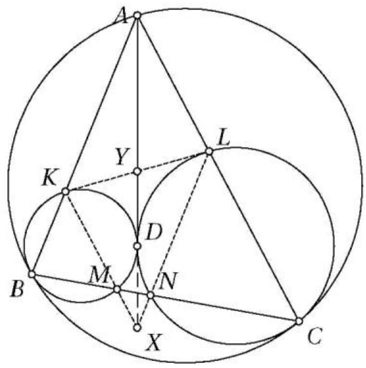
$$\measuredangle LKT=\measuredangle KBC=\measuredangle ALK,$$

па затоа $KT\parallel AL$. Аналогно $LT\parallel AK$, од каде што следува дека четириаголникот $AKTL$ е паралелограм. Според тоа, AT ја



полови KL. Од друга страна, ако $S=AD\cap KL$, тогаш $\overline{SK}=\overline{SD}=\overline{SL}$, како тангенти. Значи, и AD ја полови KL, па затоа $T\in AD$.

Втор начин. Нека правите KM и LN се сечат во точката X. Хомотетијата H_B која кружницата C_1 ја пресликува во кружницата Γ ги пресликува точките K и M во точките A и C, соодветно, па затоа $KM\parallel AC$. Аналогно $LN\parallel AB$. Според тоа, четириаголникот $AKXL$ е паралелограм, што значи дека AX минува низ средината Y наотсечката KL. Од друга страна важи



$$\overline{AK}\cdot\overline{AB}=\overline{AD}^2=\overline{AL}\cdot\overline{AC},$$

па затоа четириаголникот $BCLK$ е тетивен. Затоа $\measuredangle AKL=\measuredangle ACB=\measuredangle KMB$, па правата KL ја допира кружницата C_1. Слично, Kl ја допира кружницата C_2. Според тоа, ако правите AD и KL се сечат во точката Y', тогаш од $\overline{Y'K}=\overline{Y'D}=\overline{Y'L}$ следува дека $Y'\equiv Y$, т.е. правите AD и AX се совпаѓаат, од каде следува тврдењето на задачата.

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y, \text{ за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. За $x=0$ добиваме $f(f(y))=y+(f(0))^2$. Според тоа, $f(f(y))$, па затоа и $f(y)$ е сурјекција. Тогаш, ако $f(a)=0$, со замена во равенката добиваме $f(f(y))=y$, од каде следува дека $f(0)=0$. Сега, за $y=0$ од условот добиваме $f(xf(x))=(f(x))^2$. Според тоа

$$(f(x))^2 = f(xf(x)) = f(f(f(x))\cdot f(x)) = [f(f(x))]^2 = x^2 .$$

Ако $f(x)=x$ и $f(y)=-y$ за некои x и y, тогаш од условот следува дека $f(x^2-y)=x^2+y$. Оттука добиваме $\pm(x^2-y)=x^2+y$, т.е. $x=0$ или $y=0$. Значи, $f(x)=x$ или $f(x)=-x$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Очигледно овие функции се решенија на задачата.