VII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

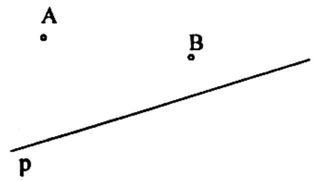
V одделение

1. Место буква стави цифра - иста буква значи иста цифра. $\overline{1abcde}\cdot 3=\overline{abcde1}$.

2. Плоштината на еден двор, што има форма на правоаголник е 10 ари. Должината на едната страна е 25 m. Да се огради дворот потребно е на секои 5 метри да се постави по еден столб. Колку столбови се потребни за оградување на дворот ?

3. За 2 kg сливи и 3 kg јаболка платено е 6900 денари, а за 4 kg сливи и 7 kg јаболка 4200 денари. Колку чини еден килограм сливи, а колку еден килограм јаболка?

4. На правата p на цртежот определи точка M така што растојанието $\overline{AM}+\overline{MB}$ да биде најмало.



V одделение

1. Ако секоја различна буква е некоја цифра тогаш:

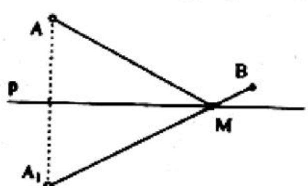
$\overline{1abcde}\cdot 3=\overline{abcde1}$ e=7, бидејќи 3·7=21,
$\overline{1abcd7}\cdot 3=\overline{abcd71}$ d=5, бидејќи 3·5=15 и 5+2=7,
$\overline{1abc57}\cdot 3=\overline{abc571}$ c=8, бидејќи 3·8=24 и 4+1=5,
$\overline{1ab857}\cdot 3=\overline{ab8571}$ b=2, бидејќи 3·2=6 и 6+2=8,
$\overline{1a2857}\cdot 3=\overline{a28571}$ a=4, бидејќи 3·4=12 и 3·1+1=4.

2. Плоштината на правоаголникот е: P=a·b т.е. 1000=a·25. Следи a=40 m. Периметарот на правоаголникот е: L=2(a+b)=130 m. Потребниот број на столбови е 130:5=26.

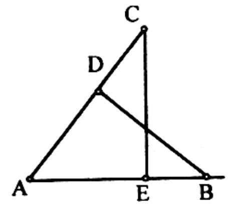
3. 2 kg сливи и 3 kg јаболка чинат 6900 денари.
4 kg сливи и 6 kg јаболка чинат 6900·2=13800 денари.
4 kg сливи и 7 kg јаболка чинат 15300 денари.

Од вториот и третиот заклучок се добива дека еден килограм јаболка чини 15300-13800=1500 денари. Еден килограм сливи чини (6900-3·1500):2=1200 денари.

4. Ја наоѓаме точката A_1 симетрична на A во однос на правата p. Оттука следува дека $\overline{AM}=\overline{A_1M}$. Точката M е бараната точка, бидејќи $\overline{A_1B}$ е најмалото растојание од A_1 до B. Бидејќи $\overline{AM}=\overline{A_1M}$, следува дека $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{A_1B}$ е најмалото растојание.



VI одделение



1. Одреди ги $x \in Z$ и $y \in Z$ ако е $|x| \cdot |y| = 12$.

2. На цртежот дадено е $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\overline{AE} = \overline{AD}$. Докажи дека $\overline{BD} = \overline{CE}$.

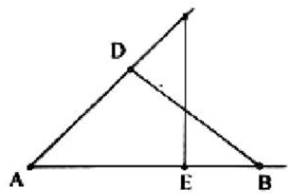
3. На состанок на пионерскиот совет на едно училиште биле присутни 12 членови. Отсутни биле $\frac{1}{7}$ од вкупниот број. Колу членови броел пионерскиот совет ?

4. Во рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$), со периметар 22 cm, повлечена е медијана AA_1. Периметрите на триаголниците ABA_1 и AA_1C соодветно се 17 cm и 19 cm. Да се определат должините на страните на триаголникот ABC.

VI одделение

1. Користиме дека $|x| \cdot |y| = |x \cdot y| = 12$. Решението ќе биде сите можни парови (x, y) чиј производ е 12 или -12 т.е. $\{(x, y) | x \cdot y = 12$ или $x \cdot y = -12$ и $x, y \in Z\}$.

2. Триаголниците ABD и ACE се складни (види цртеж), бидејќи $\overline{AE} = \overline{AD}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\angle BAC$ им е заеднички. Од складноста на триаголниците следува дека $\overline{BD} = \overline{CE}$.



3. Ако биле отсутни $\frac{1}{7}$, тогаш присутни биле $\frac{6}{7}$ од вкупниот број. Нека x е бројот на сите членови, тогаш

$$\frac{6}{7}x = 12, \text{ т.е. } x = \frac{12 \cdot 7}{6} = 14.$$

4. Види: VIII р.н. VII/2.

VII одделение

1. За која вредност на x изразот (3x-4)·(7x+8)-1,5x(24x+4)-5(1-2x) е негативен ?

2. Еден работник ја исполнува нормата за 6 часа, друг за 5 часа, а трет за 4,5 часа. Работејќи заедно тие изработиле за еден час вкупно 795 предмети. По колку предмети изработил секој од нив ?

3. Во кружница k повлечен е радиус OP и тетива AB која е симетрала на дадениот радиус. Докажи дека AB е страна на рамнострани триаголник впишан во кружницата.

4. Во рамнокракиот трапез ABCD ($\overline{AD}=\overline{BC}=6$ cm), а дијагоналата ја дели средната линија на делови од 2 cm и 5 cm. Одреди:

а) периметар на трапезот?

б) аглите на трапезот?

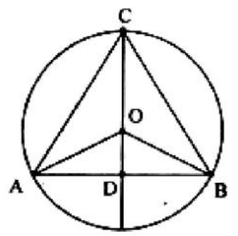
VII одделение

1. Види: III р.н. VII/2.

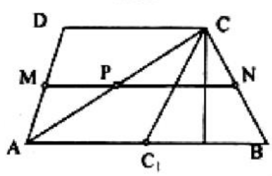
2. За 1 час првиот исполнува $\frac{1}{6}$, вториот $\frac{1}{5}$, а третиот $\frac{1}{4{,}5}=\frac{2}{9}$ од нормата. Нека x се вкупно предмети што тие треба да ги изработат. За еден час тие ќе изработат: $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{2}{9}\right)\cdot x=795$; $x=795\cdot\frac{90}{30}=1350$.

Првиот изработил: 1350:6=225, вториот: 1350:5=270, третиот: 1350:4,5=300.

3. Од $\overline{OB}=r$, $\overline{OD}=\frac{r}{2}$ (во правоаголниот триаголник катетата наспроти аголот од 30° е еднаква на половина од хипотенузата) следува дека ∠DBO=30°, а ∠BOD=60°. Од исти причини и ∠DAO=30°, а ∠AOD=60°, т.е. ∠AOB=120°. Централниот агол BOC=120°, како надворешен агол на триаголникот BOD. Од исти причини и аголот AOC=120°. Ако централните агли се еднакви, тогаш се еднакви и нивните соодветни периферни агли, т.е. ∠A=∠B=∠C=60°, ΔABC е рамностран.



4. Бидејќи MN е средна линија на трапезот, тогаш MP е средна линија на триаголникот ADC, т.е. $b=\overline{DC}=2\overline{MP}=4$ cm. PN е средна линија на триаголникот ABC, т.е. $a=\overline{AB}=2\overline{PN}=10$ cm.



а) Периметарот на трапезот е L=a+b+2c=10+4+2·6= 26 cm.

б) Ако повлечеме $CC_1 \parallel AD$, тогаш триаголникот C_1BC е рамностран, бидејќи $\overline{BC}=\overline{C_1C}=6$ cm, а $\overline{C_1B}=a-b=6$ cm. Тогаш острите агли на трапезот се 60°, а тапите 120°.

VIII одделение

1. Докажи дека ако природниот број n не е делив со 5, тогаш n^2+1 или n^2-1 е делив со 5.

2. Возот влегол во тунел за 15 секунди. До излегувањето од тунелот на последниот вагон од возот, поминале уште 30 секунди. Колку е долг возот и со каква брзина се движел ако тунелот бил долг 300 метри ?

3. Во триаголник ABC бисектриса на аголот A ја сече страната BC во точката D. Низ D е повлечена права паралелна со AC, којашто AB ја сече во точката E. Низ точката E е повлечена права паралелна со BC, којашто AC ја сече во точката F. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{CF}$.

4. Пресметај ја плоштината на делтоид со страни 16 и 20 cm, а дијагоналата што не е негова оска на симетрија е 20 cm.

VIII одделение

1. Ако природниот број не е делив со 5, тогаш остатоците при тоа делење се 1, 2, 3 и 4. Во тој случај бројот: $n=5k+1$, $n=5k+2$, $n=5k+3$ и $n=5k+4$; $k\in N$.
Со замена за секое n во дадените изрази имаме:
1° За $n=5k+1$:

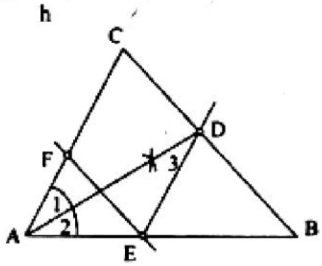
$n^2+1=(5k+1)^2+1=25k^2+10k+2$ не е делив со 5.

$n^2-1=(5k+1)^2-1=25k^2+10k=5k(5k+2)$ е делив со 5.

За останатите случаи се испитува на ист начин.

2. Бидејќи возот влегол во тунелот за 15 секунди, а до излегувањето поминале уште 30 секунди, тогаш должината на возот е два пати помала од должината на тунелот, т.е. 150 m. Брзината на возот е: $v=\dfrac{150\text{ m}}{15\text{ s}}=10\dfrac{\text{m}}{\text{s}}=\dfrac{10}{\frac{1000}{3600}}=36\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

3. Бидејќи AD е симетрала на аголот во темето A, следува дека $\angle 1=\angle 2$. Аголот $\angle 1=\angle 3$, како наизменични агли на трансверзала. Оттука следува дека $\angle 2=\angle 3$, т.е. триаголникот AED е рамнокрак и $\overline{AE}=\overline{DE}$. Четириаголникот FCDE е паралелограм по конструкција, т.е. $\overline{DE}=\overline{CF}$.



4. Страните на делтоидот се $\overline{AB}=20$, $\overline{AD}=16$ и $\overline{AC}=20$ cm. Триаголникот ABC е рамностран и неговата плоштина е: $P=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{20^2\sqrt{3}}{4}=100\sqrt{3}$.

Плоштината на ΔADC е: $P_2=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DO}$;

$\overline{DO}=\sqrt{\overline{AD}^2-\left(\dfrac{1}{2}\overline{AC}\right)^2}=\sqrt{16^2-10^2}$; $\overline{DO}=2\sqrt{39}$.

$P_2=\dfrac{1}{2}20\cdot 2\sqrt{39}$; $P_2=20\sqrt{39}$. Плоштината на делтоидот е: $P=\left(100\sqrt{3}+20\sqrt{39}\right)\text{cm}^2$.