Томи Димовски, Скопје
Ана Димовска, Скопје

ОСНОВИ НА ЛИНЕАРНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ

1. ВОВЕД

Во секојдневниот живот се среќаваме со проблеми во кои се бара да се постигне некаква цел со некои ограничувања. Најчесто се бара решавање на проблеми во кои треба да се определи најголемата или најмалата вредност при одредени ограничувања во облик на линеарни неравенки. Делот од математиката кој се занимава со изучување на овие проблеми е линеарното програмирање. Решавањето на некои од овие проблеми се сведува на наоѓање на максималната или минималната вредност на функција од облик $f = f(x, y) = Ax + By$ дефинирана на некое подмножество точки (x, y) од рамнината.

2. ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ ВО РАМНИНАТА

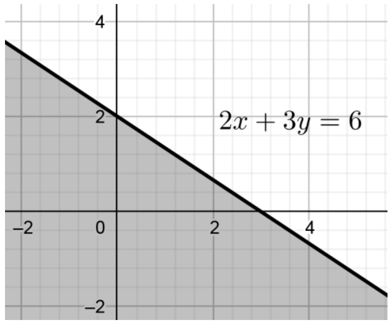
Во овој дел ќе разгледуваме линеарни неравенки од облик $ax + by \leq c$ или $ax + by \geq c$ каде што a и b не се истовремено нули. Решението на ваква неравенка се состои од сите точки во рамнината $\mathbb{R}^2$ кои ја задоволуваат дадената неравенка.

Нека со L е означена правата $ax + by = c$. Тогаш L ја дели рамнината на две полурамнини такви што за точките од едната страна на L е исполнето $ax + by < c$, а за точките од другата страна на L е исполнето $ax + by > c$. Според тоа, за да го добиеме графички решението на $ax + by \leq c$ или $ax + by \geq c$ најпрво ја скицираме правата $L: ax + by = c$. Потоа избираме пробна точка $P(x_0, y_0)$ која не лежи на правата L и ја заменуваме во неравенката, односно во неравенката заменуваме $x = x_0, y = y_0$. Ако $c \neq 0$, тогаш најчесто за пробна точка го земаме координатниот почеток. Нека претпоставиме дека точката P е решение на дадената неравенка, односно координатите на точката P ја задоволуваат дадената неравенка. Тогаш ја боиме (или шрафираме) полурамнината каде што е точката P. Ако точката P не е решение на дадената неравенка, односно координатите на точката P не ја задаоволуваат дадената неравенка, тогаш ја боиме (шрафираме) полурамнината каде што не е точката P.

Пример 1. Претстави го графички решението на неравенката

$$2x+3y\leq 6.$$

Решение. Најпрво ја скицираме правата $L: 2x+3y=6$. Координатниот почеток очигледно не е на правата L. Бидејќи исказот: $2\cdot 0+3\cdot 0\leq 6$ е вистинит, ја боиме полурамнината во која се наоѓа кооординатниот почеток (цртеж десно). ■



3. СИСТЕМИ ОД ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ И ТЕМИЊА

Да разгледаме систем од две или повеќе линеарни неравенки од облик $ax+by\leq c$ или $ax+by\geq c$. Решението на системот е подмножество R од рамнината кое е пресек на решенијата на одделните неравенки. Ова подмножество се определува во неколку чекори.

Чекор 1. За првата неравенка на системот го обојуваме (шрафираме) делот од рамнината чии точки ја задоволуваат неравенката.

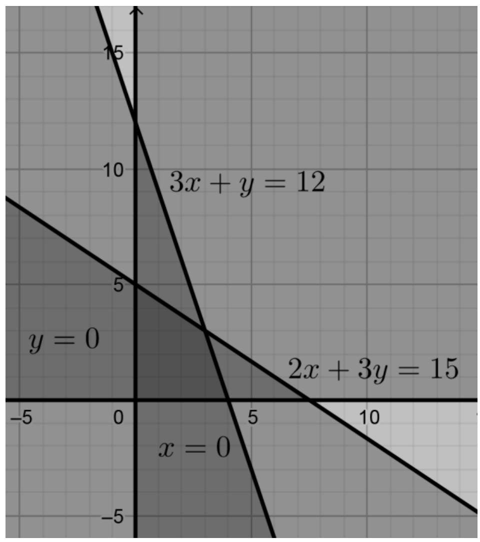
Чекор 2. Го повторуваме чекор 1 за секоја неравенка.

Чекор 3. Множеството кое е обоено со сите бои (шрафирано во сите насоки) заедно со неговиот раб е решението на системот.

Пример 2. Претстави го графички решението на системот

$$\begin{cases} 3x+y\leq 12 \\ 2x+3y\leq 15 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}.$$

Решение. Види цртж десно. ■



Да го разгледаме решението R на систем од линеарни неравенки. Бидејќи тоа е пресек од полурамнини, неговата граница се состои од прави, полуправи и отсечки кои ќе ги нарекуваме **гранични линии**. Точка P која лежи на границата на R ја нарекуваме **теме на R** ако P се добива како пресек на две гранични линии. Темето P се добива со тоа што ги определуваме равенките на граничните линии кои го определуваат темето P и го решаваме системот од овие линеарни равенки.

Пример 3. Определи ги темињата на решението R од претходниот пример.

Решение. Решението R има четири темиња. Едно е координатниот почеток $O(0,0)$, друго е $A(4,0)$ кое се добива како пресек на x-оската со правата $3x + y = 12$, трето е $B(0,5)$ кое се добива како пресек на y-оската со правата $2x + 3y = 15$. Четвртото теме C се добива како пресек на граничните линии $3x + y = 12$ и $2x + 3y = 15$. Координатите на темето $C(x, y)$ се всушност решението на системот

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases},$$

односно $C(3,3)$ е четвртото теме.■

4. ПРИМЕНА НА СИСТЕМИ ОД ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ

Пример 4. Фабрика за часовници произведува два типа часовници, A и B. Деловите за изработка на часовник од тип A чинат $\$25$, а за да се направи е потребно 5 часа. Деловите за изработка на часовник од тип B чинат $\$40$, а за да се направи е потребно 4 часа. Познато е дека фабриката располага со $\$2000$ за делови и 320 часа работна рака. Определи ги комбинациите на часовници од типовите A и B кои може да се произведат.

Решение. За поедноставно решавање на овој тип проблеми правиме табела.

Ресурси	Производи (часовници)		Расположливи ресурси
	Тип A (x)	Тип B (y)	
Делови	\$25 од часовник	\$40 од часовник	\$2000
Часови	5 часа од часовник	4 часа од часовник	320

Од табелата може да се заклучи дека:

$$25x + 40y \leq 2000,$$

бидејќи вкупната сума потрошена на делови за x од тип A и y од тип B не смее да надмине 2000, потоа

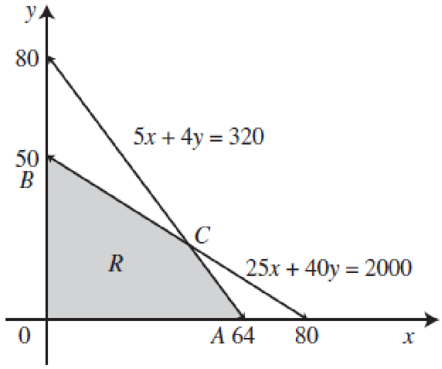
$$5x + 4y \leq 320,$$

бидејќи вкупниот збир од работни часови за изработка на часовници од тип A и тип B не смее да надмине 320 и

$$x \geq 0, y \geq 0$$

бидејќи бројот на часовници на секој од двата типа не може да е негативен.

Слично како во претходните примери, го добиваме решението R на овој систем неравенки како на цртежот десно. Секој пар од цели броеви (x, y) од множеството R претставува комбинација од часовници од тип A и тип B кои може да се произведат во фабриката при дадените ограничувања, односно линеарните неравенки. Множеството R уште го нарекуваме **допуштена област** за системот неравенки, а секоја нејзина точка **допуштено решение** или **програма**.



Множеството R има четири темиња: Координатниот почеток $O(0,0)$, точката $A(64,0)$ како пресек на x-оската и правата $5x + 4y = 320$, точката $B(0,50)$ како пресек на y-оската и правата $25x + 40y = 2000$ и точката $C(48,20)$ како пресек на правите $5x + 4y = 320$ и $25x + 40y = 2000$. Овие четири темиња се допуштени решенија. ■

Пример 5. Фабрика купува дрвени штици со должина од 8 метри и 14 метри. Секоја штица со должина од 8 метри се сечи на една со должина од 5 метри и една со должина од 3 метри, а секоја со должина од 14 метри се сечи на една од 5 метри и три од 3 метри. Нека претпоставиме дека фабриката има потреба од најмалку седумдесет и пет штици со должина од 5 метри и сто дваесет и пет штици со должина од 3 метри за да заврши некоја работа. Определи го бројот на комбинации од 8 метарски и 14 метарски штици кои ќе бидат доволни за таа работа.

Решение. Најпрво правиме табела со податоците од задачата.

Ресурси	Производи	
	5m штици	3m штици
8m штици	1 од штица	1 од штица
14m штици	1 од штица	3 од штица
Побарувачка	75	125

Од табелата може да се заклучи дека:

$$x + y \geq 75,$$

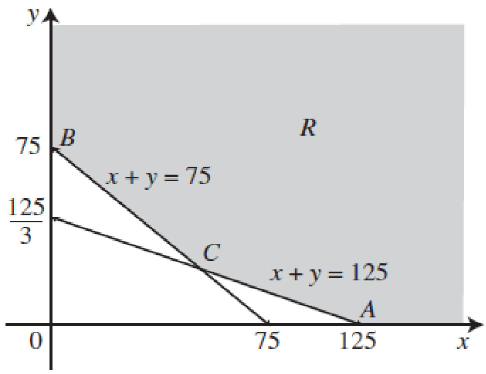
бидејќи вкупниот број штици со должина $5m$ кои се добиваат од x штици од 8 m и y штици од 14 m мора да е најмалку 75, потоа

$$x + 3y \geq 125,$$

бидејќи вкупниот број штици со должина $3m$ кои се добиваат од x штици од $8m$ и y штици од $14m$ мора да е најмалку 125 и

$$x \geq 0, y \geq 0$$

бидејќи бројот на штици со должина $8m$ и $14m$ не може да е негативен.



Слично како во претходните примери, го добиваме решението R на овој систем неравенки како на цртежот десно. Допуштеното множество R има три темиња: $A(125,0)$ како пресек на x-оската и правата $x + 3y = 125$, $B(0,75)$ како пресек на y-оската со правата $x + y = 75$ и $C(50,25)$ како пресек на правите $x + 3y = 125$ и $x + y = 75$. Овие три темиња се допуштени решенија. ■

5. ЗАДАЧА НА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Задачата на линеарно програмирање или само ЛП-задачата се состои во определување на најголемата или најмалата вредност на линеарна функција

$$f = f(x, y) = Ax + By$$

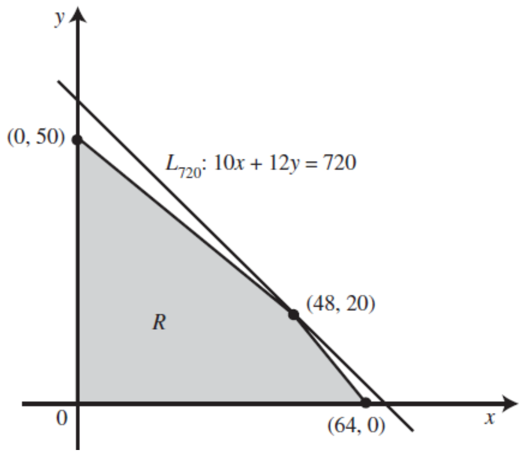
при дадени услови

$$a_{i1}x + b_{i1}y \leq c_{i1} \text{ или } a_{i1}x + b_{i1}y \geq c_{i1} \text{ за } i = \overline{1, n}$$

кога $x, y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Функцијата f ја нарекуваме **целна функција**. Допуштеното решение за кое се добива најголемата вредност, односно најмалата вредност на целната функција се вика **максимално допуштено решение** или **максимална програма**, односно **минимално допуштено решение** или **минимална програма**. Максималното или минималното допуштено решение уште ги нарекуваме и **оптимално допуштено решение** или оптимална програма.

Нека претпоставиме дека фабриката за часовници од Пример 4 прави профит од \$10 за секој часовник од тип A и \$12 за секој часовник од тип B. Природно е да не интересира да ги знаеме кои комбинации од типовите на часовници A и B би донеле најголем профит. Профитот P добиен за x

часовници од типот A и y часовници од типот B е даден со целната функција $P = 10x + 12y$. Наша цел е да ги определиме точките (x, y) од допуштената област R за кои P има максимална вредност.



Ги скицираме графиците на функцијата $P = 10x + 12y$. За секоја вредност на P тоа е права L_p во xy рамнината. За различни вредности на P се добиваат паралелни прави со коефициент на правец $k = -\frac{5}{6}$. Со зголемување на вредноста на функцијата P, се зголемува растојанието од правата L_p до координатниот почеток. Според тоа, максималниот профит ќе се оствари на правата $P = 10x + 12y$ која е најдалеку од координатниот почеток, но ја допира допуштената област R, односно максималниот профит ќе се оствари во некое теме од областа R.

Како што се гледа од горниот цртеж, правата на максималниот профит е права која минува низ темето $(48,20)$. Значи,

$$P = P(48,20) = 10 \cdot 48 + 12 \cdot 20 = 480 + 240 = 720,$$

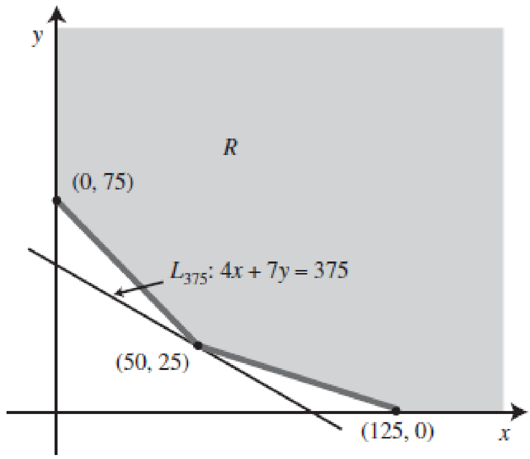
односно максималниот профит е $\$720$, кој се достигнува со продавање на 48 часовници од тип A и 20 часовници од тип B.

Од друга страна целта на Пример 5 не е да се добие максимален профит, туку да се добие најмал трошок. На пример, нека претпоставиме дека фабриката плаќа $0,50 за метар од секоја штица. Тогаш трошокот за x штици со должина $8m$ и y штици со должина $14m$ е даден со целната функција $C = 4x + 7y$. Наша цел е да ги определиме точките (x, y) од допуштената област R за кои C е минимална. Ги скицираме графиците на функцијата $C = 4x + 7y$. За секоја вредност на C тоа е права L_c во xy рамнината. За различни вредности на C се добиваат паралелни прави со коефициент на правец $k = -\frac{4}{7}$. Со намалување на вредноста на функцијата C, се намалува растојанието од правата L_c до координатниот почеток. Според тоа, минималниот трошок ќе се оствари на правата $C = 4x + 7y$ која е најблиску до координатниот почеток но ја допира допуштената област R, односно минималниот трошок ќе се оствари во некое теме од областа R.

Како што се гледа од долниот цртеж десно, правата на минималниот трошок е права која минува низ темето $C(50,25)$. Значи,

$$C = C(50,25) = 4 \cdot 50 + 7 \cdot 25 = 200 + 175 = 375,$$

односно минималниот трошок е \$375, кој се достигнува со купување на 50 штици со должина $8m$ и 25 штици со должина $14m$.



Да се реши ЛП – задача подразбира да се најде допуштената област, а потоа да се определи оптимално допуштено решение.

Ако допуштената област е непразно множество и ако постои оптимално допуштено решение, тогаш велиме дека ЛП– задачата е **решлива**.

Заклучок. Ако е решлива ЛП-задачата, тогаш оптималното решение се достигнува во некое од темињата на допуштената област и ако целната функција има оптимално допуштено решение во две темиња, тогаш во секоја точка од отсечката определена со тие две темиња има оптимално допуштено решение.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Претстави ги графички решенијата на следните неравенки:

а) $x - 2y \leq 4$;

б) $3x + y \geq 6$;

в) $x \geq \frac{3}{2}$;

г) $y \leq 3$.

2. Претстави ги графички решенијата на следните системи неравенки:

а) $\begin{cases} 2x + 3y \geq -1 \\ 5x - 6y \leq 1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$.

3. Од суровините A,B и C треба да се произведат два типа на производи. За изработка на еден производ од првиот тип потребни се 10g од суровината A, 30g од суровината B и 10g од суровината C. Неговата цена е 700 денари. За изработка на еден производ од вториот тип потребни се 10g од суровината A, 10g од суровината B и 50g од суровината C. Неговата цена е 400 денари. Ако се на располагање 10kg од суровината A, 24kg од суровината B и 30kg од суровината C, по колку од секој тип треба да се направат за да се оствари максимална заработувачка?

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Lipschutz, J. Schiller, R. Alu Sprinivasan. Schaum's Outline of theory and problems of beginning finite mathematics, McGraw-Hill Education, 2005

[2] H.A. Eiselt, C. L. Sandblom. Linear Programming and its applications and extensions, Springer, 2007