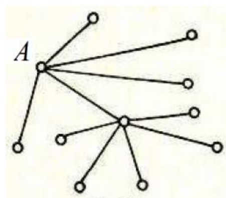
Сојузен натпревар 1975

Седмо одделение

1. Збирот на шест последователни природни броја, од кои ниту еден не е делив со 7, е делив со 21, но не е делив со 42. Докажи!
   Определи шест такви броеви, така што нивниот збир е четирицифрен број и е квадрат на некој природен број.
   Решение. Броевите се $7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6$ и нивниот збир е $S=42n+21=21(2n+1)$. Јасно, $21|S$ и при делење на S со 42 се добива остаток 21, т.е. S не е делив со 42.
   За да овој збир биде квадрат на природен број треба $2n+1=21k^2$, каде k е непарен природен број. За да овој збир биде четирицифрен број, мора $2<k^2<23$. Последното е можно само за $k^2=9$. Сега добиваме $2n+1=21k^2=189$, односно $n=94$. Бараните броеви се: 659, 660, 661, 662, 663 и 664.

2. Определи го оној двоцифрен број кој е еднаков на збирот на кубот на вредноста на цифрата на десетките и квадратот на вредноста на цифрата на единиците на тој двоцифрен број.
   Решение. Нека бараниот број е $\overline{ab}\,(a\neq 0)$. Тогаш $10a+b=a^3+b^2$, па затоа $10a-a^3=b^2-b$, т.е. $a(10-a^2)=b(b-1)$. Очигледно $a\in\{1,2,3\}$. За $a=1$ добиваме $9=b(b-1)$ и за $a=3$ добиваме $3=b(b-1)$, што не е можно (Зошто?). За $a=2$ добиваме $12=b(b-1)$, од каде наоѓаме $b=4$. Конечно, бараниот број е 24.

3. Пет отсечки се конструирани од заедничка точка A. Потоа од некои од слободните крајни точки на овие отсечки (не од точката A) се конструирани пет нови отсечки и постапката е повторена неколку пати. На крајот Петар ги избројал слободните краеви и констатирал дека има вкупно 700 слободни краеви. Дали Петар добро ги пребројал слободните краеви?
   

   Решение. Нека од било кој слободен крај се конструирани 5 нови отсечки. Тогаш наместо еден слободен крај добиваме5 нови слободни краеви, што значи дека бројот на слободните краеви се

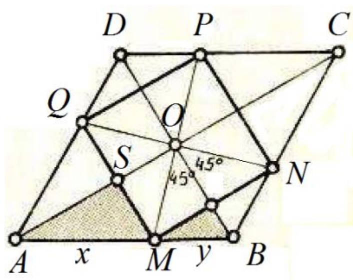
зголемил за 4. Со секоја нова конструкција на отсечки од неколку слободни краеви, бројот на слободните креви ќе се зголеми за $4k$, $k\in\mathbb{N}$. Според тоа, вкупниот број слободни краеви ќе биде $4n+5$, па како $700=4\cdot 175$, заклучуваме дека во броењето е направена грешка.

4. Даден е ромб $ABCD$ со $\measuredangle BAD=60^\circ$. Симетралите на аглите меѓу дијагоналите ги сечат страните на ромбот во точките M,N,P и Q.

а) На кој вид четириаголници припаѓа четириаголникот $MNPQ$?

б) Ако точката M припаѓа на страната AB, пресметај го односот $AM:MB$.

в) Определи го односот на оние отсечоци на големата и малата дијагонала на ромбот кои лежат надвор од четириаголникот $MNPQ$.



Решение. а) Од складноста на триаголниците OBM и OBN следова дека $OM=ON$, а од складноста на триаголниците OAM и OAQ следува дека $OM=OQ$ ((цртеж десно). На ист начи е и $OQ=OP$. Од тука заклучуваме дека $MP=NQ$ и како $\measuredangle MON$ е прав агол, следува дека четириаголникот $MNPQ$ е квадрат.

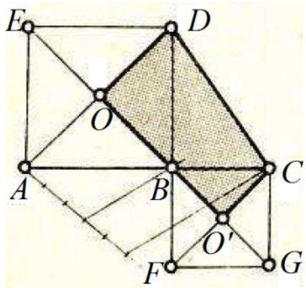
б) Триаголникот AMQ е рамностран. Страната на овој триаголник да ја означиме со x. Тогаш триаголникот BRM кој е половина од рамностран триаголник има висина $MR=\frac{x}{2}$. Оттука $MR=MB\frac{\sqrt{3}}{2}$, па ако ставиме $MB=y$, добиваме $\frac{x}{2}=y\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $x=y\sqrt{3}$. Според тоа, $AM:MB=x:y=y\sqrt{3}:y=\sqrt{3}:1$.

в) Од триаголникот AMQ следува $AS=\frac{x\sqrt{3}}{2}=y\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3y}{2}$, а од триаголникот BRM следува $BR=\frac{y}{2}$. Според тоа, $AS:BR=\frac{3y}{2}:\frac{y}{2}=3:1$.

5. Отсечката $AC=a$ со нејзината внатрешна точка B е поделена во однос 3:2. Над отсечките AB и BC, од различни страни во однос на отсечката AC, се конструирани квадрати $ABDE$ и $CBFG$. Нека O и O' се пресеците на дијагоналите на овие квадрати. Определи го одно-

сот на плоштината на четириаголникот $OO'CD$ и плоштината на квадратот со должина на страна AC.

Решение. Четириаголникот $OO'CD$ е составен од три правоаголни триаголници, од кои OBD и $O'BC$ се четвртини од соодветни квадрати (цртеж десно). Бараната плоштина е



$$P=\frac{1}{4}(\frac{3}{5}a)^2+\frac{1}{4}(\frac{2}{5}a)^2+\frac{1}{2}\frac{3a}{5}\cdot\frac{2a}{5}$$
$$=\frac{9a^2}{100}+\frac{4a^2}{100}+\frac{6a^2}{50}=\frac{a^2}{4}$$

а тоа е четвртина од плоштината на квадрат со должина на страна a. Значи бараниот однос е 1:4.

Осмо одделение

1. Елементите на множеството $A=\{a,b,c\}$ се било кои степени на произволни прости двоцифрени броеви помали од 20. Докажи дека меѓу елементите на множеството A постојат два броја такви што збирот или разликата на тие два броја е делива со 5.

Решение. Елементите на множеството A се некои степени на простите броеви 11, 13, 17 и 19. Сите степени на овие броеви завршуваат на една од цифрите 1, 3, 7 или 9. Но, множеството A има три елементи, па затоа меѓу овие броеви или има два броја со иста цифра на единиците, или сите три броја имаат различни цифри на единиците.
Во првиот случај разликата, а во вториот случај збирот на два соодветни броја ($3+7$ или $1+9$) завршуваат на нула, а тоа е деливо со 5.

2. Определи ги броевите x, y и z за кои
$$4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3=0.$$

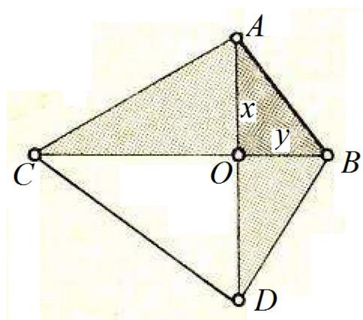
Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$(2x-1)^2+(3y-1)^2+(4z-1)^2=0.$$
Бидејќи квадрат на реален број е поголем или еднаков на нула, а збир на ненегативни броеви е еднаков на нула само ако тие се енакви на нула, добиваме $2x-1=3y-1=4z-1=0$, од каде наоѓаме $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ и $z=\frac{1}{4}$.

3. При изработка на еден метален клин отпадоците се 12,5% од употребениот материјал. На тој начин, од едно парче метал се направени точно 100000 такви клинови. Сите добиени отпадоци се повторно стопени во едно парче метал и од него на истиот начин се направени исти такви клинови. Оваа постапка се повторува се додека е можно од отпадоците да се направи барем еден таков клин.
Определи го вкупниот број клинови кои се добиени, сметајќи ги и првите 100000 клинови.

Решение. Отпадоците изнесуваат $\frac{12,5}{100}=\frac{1}{8}$ од употребениот материја. Според тоа, од отпадоците добиени со изработка на првите 100000 клинови може да се направат $100000:8=12500$ клинови со $\frac{1}{8}$ отпадоци. Од новите отпадови добиваме $12500:8=1562$ клинови, со отпадок кој изнесува $\frac{4}{8}$ од еден клин. Сега имаме $\frac{1562+4}{8}=\frac{1566}{8}$ остатоци, па од нив може да се направат 195 клонови со остаток $\frac{6}{8}$. Понатаму, имаме $201:8-25$ (остаток е 1); $26:8=3$ (остаток е 2). Конечно, немаме доволно материјал за да се продолжи производството. Значи, изработени се вкупно $100000+12500+1562+195+25+3=114285$ клинови со остаток од $\frac{5}{8}$ материјал за изработка на нов клин.

4. Набљудувач гледа отсечка AB од две точки C и D кои се на растојание $300\,m$, под агли 30°. Правите AD и BC се заемно нормални. Определи ја должината на отсечката AB.

Решение. Нека O е пресечната точка на правите AD и BC (види цртеж). Правоаголните триаголници ACO и BOD се половинки од рамнострани триаголници (имаат внатрешни агли од $30, 60^\circ$ и 90°). Ако воведеме ознаки $OA=x$ и $OB=y$ добиваме $OC=x\sqrt{3}$ и $OD=y\sqrt{3}$. Сега, од правоаголниот триаголник CDO имаме



$$(x\sqrt{3})^2+(y\sqrt{3})^2=300,$$

од каде добиваме

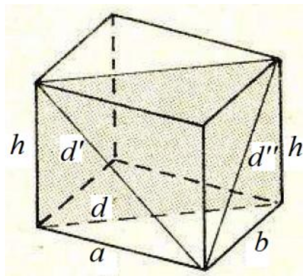
$$x^2+y^2=30000.$$

Конечно, од правоаголниот триаголник AOB добиваме

$$AB=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{30000}=100\sqrt{3}.$$

5. Рабовите на основа на квадар се однесуваат како 4:3, дијагоналите на бочните ѕидови се однесуваат како $\sqrt{20}:\sqrt{13}$, а плоштината на дијагоналниот пресек се однесува спрема волуменот на квадарот како 2:1. Определи ги плоштината и волуменот на овој квадар.

Решение. Нека a и b се основните рабови, d' и d'' соодветните дијагонали на бочните ѕидови, d дијагоналата на основата и h висината на квадарот (цртеж десно). Од дадените размери ги добиваме пропорциите



$a:b=4:3,\ d':d''=\sqrt{20}:\sqrt{13},\ dh:abh=2:1$

Од овде $d'^2:d''^2=20:13$, односно

$$(a^2+h^2):(b^2+h^2)=20:13 \text{ и } d:ab=2:1.$$

Од $d:ab=2:1$ следува $\sqrt{a^2+b^2}:ab=2:1$, т.е. $(a^2+b^2):a^2b^2=4:1$ Сега, од

$$a:b=4:3 \text{ и } (a^2+b^2):a^2b^2=4:1$$

имаме $4b=3a$ и $a^2+b^2=4a^2b^2$, па со замена за $b=\frac{3}{4}a$, по средувањето добиваме $a^2=\frac{25}{36}$, т.е. $a=\frac{5}{6}$. Понатаму, $b=\frac{3}{4}a=\frac{5}{8}$.

Сега, со замена во $(a^2+h^2):(b^2+h^2)=20:13$ добиваме

$$(\tfrac{25}{36}+h^2):(\tfrac{25}{64}+h^2)=20:13,$$

од каде $h^2=\frac{25}{144}$, односно $h=\frac{5}{12}$.

Конечно, $V=abh=\frac{125}{576}$.