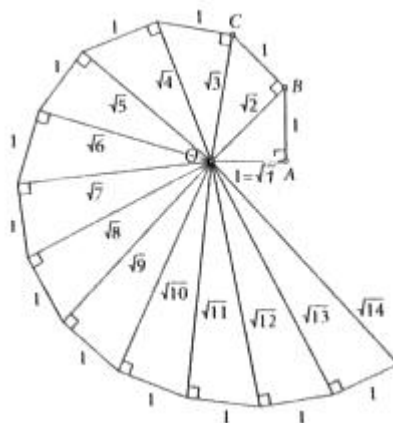


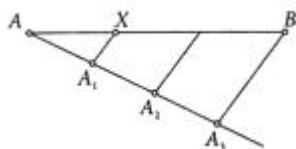
Шефкет Арсланагиќ
Алија Муминагиќ

СПИРАЛА ОД КВАДРАТНИ КОРЕНИ ОД БРОЕВИТЕ 1, 2, 3, ...

На цртежот десно е прикажана спиралата од квадратни корени на броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, Истата е добиена со следнава постапка: Конструираме рамнокрак правоаголен триаголник OAB чии катети се со должини $\overline{OA} = \overline{AB} = 1 = \sqrt{1}$. Сега од Питагоровата теорема добиваме $\overline{OB} = \sqrt{2}$. Потоа конструираме правоаголен триаголник OBC со $\overline{BC} = 1$ и $\angle B = 90^\circ$. Сега, повторно од Питагоровата теорема следува $\overline{OC} = \sqrt{3}$ итн.



Во продолжение ќе видиме како може да се конструира спирала од броевите $\sqrt{0,1111\dots}$, $\sqrt{0,2222\dots}$, ..., $\sqrt{0,8888\dots}$. За таа цел прво да забележиме дека рационалните броеви имаат конечен или периодичен децимален запис. Според тоа, бројот $0,1111\dots$ кој има периодичен децимален запис е рационален број. Но, кој е тој број? Да ставиме $x = 0,1111\dots$. Тогаш $10x = 1,111\dots$, од каде добиваме $10x = 1 + 0,1111\dots$, т.е. $10x = 1 + x$, па затоа $x = \frac{1}{9}$. Значи $\sqrt{0,1111\dots} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$, т.е. $\sqrt{0,1111\dots}$ е рационален број.



Сега да конструираме отсечка со должина $\sqrt{0,1111\dots}$. За таа цел треба да ја поделиме отсечката AB , $\overline{AB} = 1$ на $n = 3$ еднакви делови. Ја цртаме отсечката AB , а потоа во точката A повлекуваме полуправа на која наоѓаме точки A_1, A_2, A_3 такви што $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$. Понатаму ја повлекуваме правата BA_3 и низ точките A_1 и A_2 повлекуваме прави паралелни на неа. Овие прави ја сечат отсечката AB во две точки кои истата ја делат на три еднакви дела. При ознаки на цртежот десно, имаме

$$\overline{AX} = \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{0,1111\dots}$$

Понатаму, за да конструираме спиралата од броевите

$$\sqrt{0,1111\dots}, \sqrt{0,2222\dots}, \dots, \sqrt{0,8888\dots},$$

прво конструираме правоаголен триаголник со катети

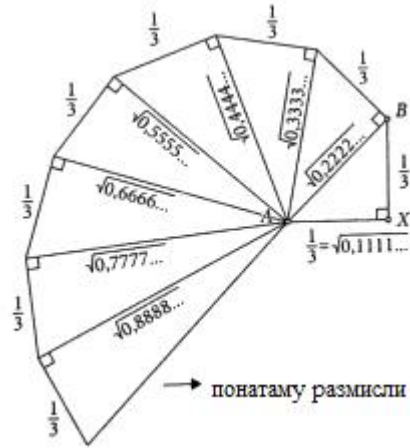
$$\overline{AX} = \overline{XB} = \frac{1}{3} = \sqrt{0,1111\dots}$$

Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB} = \sqrt{0,2222\dots}$$

Потоа над AB како над катета конструираме правоаголен триаголник кај кој втората катета е со

должина $\frac{1}{3} = \sqrt{0,1111\dots}$, а хипотенузата е со должина $\sqrt{0,3333\dots}$ итн.



→ понатаму размисли

Сега да ја разгледаме спиралата прикажана на цртежот десно. Сите триаголници со кои е добиена спиралата се правоаголници и кај сите висината повлечена од темето на правиот агол кон хипотенузата е со должина еднаква на 1. При ознаки на цртежот десно, за правоаголникот $\triangle ABC$ имаме: $\overline{AB} = x_0$, $\overline{BC} = x_1$, $\overline{AC} = c$, $\overline{AM} = c_1$, $\overline{MC} = c_2$, $\overline{BM} = 1$. Сега, од Питагоровата теорема следува

$$x_0^2 + x_1^2 = c^2, \quad (1)$$

а од Евклидовата теорема следува

$$1^2 = c_1 c_2, \quad x_0^2 = c c_1, \quad x_1^2 = c c_2. \quad (2)$$

Ако ги помножиме последните две равенства во (2) и го примениме првото равенство добиваме

$$x_0^2 x_1^2 = c^2 c_1 c_2 = c^2. \quad (3)$$

Сега, од (2) и (3) следува равенството

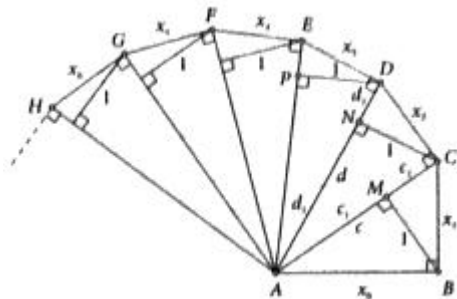
$$x_0^2 + x_1^2 = x_0^2 x_1^2. \quad (4)$$

Понатаму, за правоаголникот $\triangle ACD$ имаме

$$\overline{AC} = c, \overline{AD} = d, \overline{CD} = x_2, \overline{AN} = d_1, \overline{ND} = d_2, \overline{CN} = 1.$$

На потполно ист начин како претходно добиваме $c^2 + x_2^2 = d^2$, па со замена од (1) наоѓаме

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = d^2 \quad (5)$$



и

$$1^2 = d_1 d_2, c^2 = d d_1, x_2^2 = d d_2. \quad (6)$$

Ако ги помножиме последните две равенства во (6) и го примениме првото равенство добиваме

$$c^2 x_2^2 = d^2 d_1 d_2 = d^2. \quad (7)$$

Сега, од (5), (7) и (3) добиваме

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_0^2 x_1^2 x_2^2. \quad (8)$$

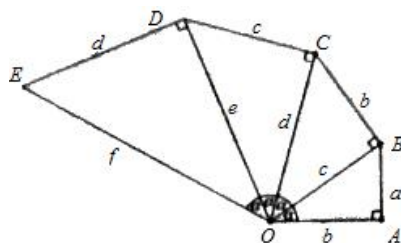
Продолжувајќи ја постапката, на потполно идентичен начин, со помош на математичка индукција може да се докаже дека за должините на отсечките $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ кои ја формираат спиралата на горниот цртеж важи

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_0^2 x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2. \quad (9)$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Да ја разгледаме спиралата прикажана на цртежот десно, која е добиена така што $\triangle OAB \sim \triangle OBC \sim \triangle OCD \sim \triangle ODE$ и конструираниите триаголници се правоаголни. Притоа да претпоставиме дека $b > a$. Од $\triangle OAB \sim \triangle OBC$ и Питагоровата теорема, при дадените ознаки имаме

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$a^2 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = b^2,$$

т.е. последователно на равенствата

$$\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2} = 1,$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Сега, од $b > a$ следува $b^2 > a^2$, па затоа $b^2 > \frac{a^2}{2}$, па од последното равенство следува

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (10)$$

Да ја разгледаме отсечката AB , $\overline{AB} = x + y$ и нека точката C е таква што $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$ и важи

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}. \quad (11)$$



Тогаш за точката C велиме дека ја дели отсечката AB во однос на златен пресек. Јасно, $x > y$ и равенството (11) е еквивалентно на равенството

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0.$$

На потполно идентичен начин како погоре добиваме $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Бројот $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ го нарекуваме *златен број*.

Од досега изнесеното следува дека во горната конструкција со помош на сличните триаголници важи $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, од каде добиваме $b = a\sqrt{\Phi}$.

Понатаму, за бројот Φ важи $\Phi^2 = 1 + \Phi$, па затоа

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \Phi a^2} = a\sqrt{1 + \Phi} = a\sqrt{\Phi^2} = a\Phi. \quad (12)$$

Ако ставиме $a = 1$, добиваме $b = \sqrt{\Phi}$ и $c = \Phi = \sqrt{\Phi^2}$. Понатаму,

$$d = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{\Phi + \Phi^2} = \sqrt{\Phi(1 + \Phi)} = \sqrt{\Phi\Phi^2} = \sqrt{\Phi^3}.$$

Забележуваме дека во случајот кога $a = 1$ должините на првите четири отсечки на горната спирала последователно се корените на ненегативните степени на златниот број Φ , т.е. тоа се отсечките со должини $\sqrt{\Phi^0}$, $\sqrt{\Phi^1}$, $\sqrt{\Phi^2}$ и $\sqrt{\Phi^3}$.

Нека претпоставиме дека должините на k -тата и $(k+1)$ -тата отсечка се $\sqrt{\Phi^{k-1}}$ и $\sqrt{\Phi^k}$. Тогаш за должината на $(k+2)$ -тата отсечка добиваме

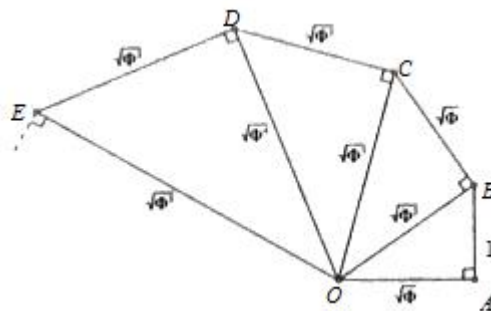
$$\sqrt{\Phi^{k-1} + \Phi^k} = \sqrt{\Phi^{k-1}(1 + \Phi)} = \sqrt{\Phi^{k-1}\Phi^2} = \sqrt{\Phi^{k+1}},$$

т.е. таа е еднаква ка квадратниот корен од $(k+1)$ -виот степен на златниот број Φ . Сега, од принципот на математичка индукција следува дека во случај кога $a = 1$ должините на страните на секој од триаголниците во претходната спирала се однесуваат како $\sqrt{\Phi^k} : \sqrt{\Phi^{k+1}} : \sqrt{\Phi^{k+2}} = 1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$. Триаголникот чии дожини на страни се однесуваат како $1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$ го нарекуваме *златен триаголник*.

Од претходните разгледувања следува како можеме последователно да ги конструираме степените на бројот $\sqrt{\Phi}$.

Тоа може да се направи на следниов начин:

- конструираме правоаголен триаголник со катети 1 и 2, чија хипотенуза е со должина $\sqrt{5}$,
- конструираме отсечка чија должина е еднаква на аритметичката средина на отсечките со должини $\sqrt{5}$ и 1, т.е. отсечка со должина $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,
- конструираме правоаголен триаголник со катета со должина 1 и хипотенуза со должина Φ , а чија втора катета е со должина $\sqrt{\Phi}$ (зошто?), со што всушност го конструираме златниот триаголник $\triangle OAB$,
- последователно ги конструираме сличните триаголници OBC , OCD , ODE , ... (цртеж десно).



Интересно е тоа што златниот пресек го наоѓаме и во Кеопсовата пирамида. Кеопс, египетски фараон од IV династија (точното име Кнум Куфу, владеел од 2589-2566 пне.) ја изградил најголемата пирамида со квадратна основа.



Кеопсовата пирамида



Статуа на Кеопс (Куфу)

За математичарите е интересен податокот дека оваа пирамида е изградена така што квадратот на висината на пирамидата е еднаков на плоштината на бочниот ѕид, т.е. според ознаките на долниот цртеж важи:

$$\overline{SO}^2 = h^2 = P_{\triangle ABS} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{SE}}{2} = \frac{2ab}{2} = ab.$$

Од Питагоровата теорема, применета на правоаголник SOE следува

$$b^2 = a^2 + h^2 = a^2 + ab,$$

од каде добиваме $\frac{b}{a} = \Phi$, т.е. $b = a\Phi$

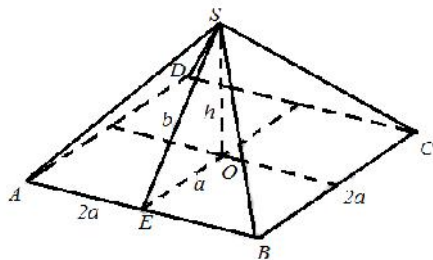
Понатаму, од $b = a\Phi$ следува

$$h^2 = ab = a^2\Phi, \text{ т.е. } h = a\sqrt{\Phi}.$$

Оттука следува $a : h : b = a : a\sqrt{\Phi} : a\Phi = 1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$, што значи дека $\triangle SOE$ е златен. Постојат записи дека Кеопсовата пирамида била висока 280 египетски лакти, т.е. $h = 146,72 \text{ m}$ (еден египетски лакт е $0,524 \text{ m}$), а ширината на основата 440 египетски лакти или $2a = 230,36 \text{ m}$. Според тоа,

$$\frac{h}{a} = \frac{14}{11} = 1,27272727... \approx 1,2720196495... = \sqrt{\Phi}.$$

Меѓутоа, денес заради ерозијата висината на Кеопсовата пирамида е $138,8 \text{ m}$. Забележуваме дека отстапувањето во горниот однос е во четвртата децимала, што е незначително, особено ако се има предвид дека во оваа монументално дело, кое било највисока градба во светот изградена од човек повеќе од 3800 години, е вграден 5,9 милиони тони материјал.



Литература

1. V. Blagojević: *Teoremi i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, I. Sarajevo, 2002
2. D. Palman: *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996
3. B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
4. P. Малчески: *Златен пресек и златен правоаголник*, Математички талент, Скопје, 2022