БМО 2014

1. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xy + yz + zx = 3xyz$. Докажи, дека
$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x+y+z) - 3.$$
Кога важи знак за равенство?
Решение. *Прв начин*. Равенството од условот е еквивалентно со равенството
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3. \qquad (1)$$
Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $x^2y+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{x^2y\cdot\frac{1}{y}}=2x$ и аналогно добиваме $y^2z+\frac{1}{z}\geq 2y$ и $z^2x+\frac{1}{x}\geq 2x$.
Ако ги собереме последните три неравенства и го искористиме равенството (1) го добиваме бараното неравенство.
Знак за равенство важи ако и само ако $x^2y=\frac{1}{y}$, $y^2z=\frac{1}{z}$ и $z^2x=\frac{1}{x}$, од каде лесно следува $x=y=z=1$.
Втор начин. Равенството од условот е еквивалентно со равенството (1). Затоа
$$\begin{aligned}x^2y+y^2z+z^2x-2(x+y+z)+3 &= x^2y-2x+\frac{1}{y}+y^2z-2y+\frac{1}{z}+z^2x-2x+\frac{1}{x}\\ &= y(x-\tfrac{1}{y})^2+z(y-\tfrac{1}{z})^2+x(z-\tfrac{1}{x})^2\geq 0.\end{aligned}$$
Знак за равенство важи ако и само ако $x-\frac{1}{y}=y-\frac{1}{z}=z-\frac{1}{x}=0$, од каде лесно следува $x=y=z=1$.

2. За природниот број n ќе велиме дека е специјален ако постојат природни броеви a, b, c и d такви што $n=\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$.
а) Докажи, дека постојат бесконечно многу специјални броеви.
б) Докажи, дека бројот 2014 не е специјален.
Решение. а) Ако земеме $a=nc, b=nd$ добиваме дека $\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}=n^3\frac{c^3+2d^3}{c^3+2d^3}=n^3$, што значи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот n^3 е специјален.
б) *Прв начин*. Да забележиме дека $2014=2\cdot 19\cdot 53$. Ако 2014 е специјален број, тогаш
$$x^3+2y^3=2014(u^3+2v^3) \qquad (1)$$
за некои природни броеви x, y, u, v. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за така избраните вредности x, y, u, v вредноста на изразот x^3+2y^3 е најмала. Сега $19\,|\,x^3+2y^3$. Ќе докажеме дека $19\,|\,x$ и $19\,|\,y$. Ако претпоставиме дека $19\,|\,x$, тогаш очигледно $19\,|\,y$ и обратно. Затоа нека

претпоставиме дека $19 \nmid x$ и $19 \nmid y$. Тогаш од $x^3 \equiv -2y^3 (\text{mod} 19)$ следува дека $(x^3)^6 \equiv (-2y^3)^6 (\text{mod} 19)$, т.е. $x^{18} \equiv 2^6 y^{18} (\text{mod} 19)$ и од малата теорема на Ферма следува дека $1 \equiv 2^6 (\text{mod} 19)$ што е противречност.

Според тоа, $x = 19x_1, y = 19y_1$ за некои природни броеви x_1, y_1. Заменуваме во (1) и добиваме

$$19^2(x_1^3 + 2y_1^3) = 2 \cdot 53(u^3 + 2v^3), \tag{2}$$

т.е. $19 \mid u^3 + 2v^3$, од каде следува дека $u = 19u_1, v = 19v_1$ за некои природни броеви u_1, v_1. Заменуваме во (2) и добиваме

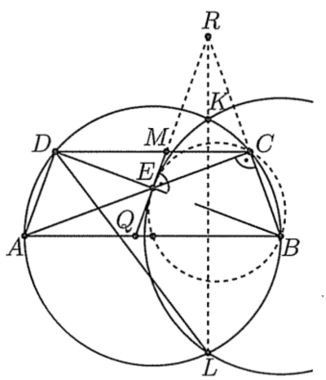
$$(x_1^3 + 2y_1^3) = 2014(u_1^3 + 2v_1^3).$$

Бидејќи $x_1^3 + 2y_1^3 < x^3 + 2y^3$, последното противречи со минималноста на $x^3 + 2y^3$. Затоа 2014 не е специјален број.

Втор начин. Нека претпоставиме дека $2014 = \frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$, за некои природни броеви a, b, c и d, т.е. дека $a^3 + 2b^3 = 2 \cdot 19 \cdot 53(c^3 + 2d^3)$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $\text{NZD}(a,b,c,d) = 1$. Имаме $x^3 \equiv 0, \pm 1, \pm 7, \pm 8 (\text{mod} 19)$, па затоа $a^3 + 2b^3 \equiv 0 (\text{mod} 19)$ ако и само ако $19 \mid a, b$. Но, тогаш од $19^3 \mid a^3 + 2b^3$ следува дека $19^2 \mid c^3 + 2d^3$, од каде следува $19 \mid c, d$, што противречи на $\text{NZD}(a,b,c,d) = 1$.

3. Нека $ABCD$ е трапез впишан во кружница Γ со дијаметар AB и нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на трапезот. Кружницата со центар во точката B и радиус BE ја сече кружницата Γ во точките K и L, при што точката K е од иста страна на правата AB како и точката C. Ако нормалата повлечена од точката E на правата BD ја сече правата CD во точката M, докажи дека правите KM и DL се заемно нормални.

Решение. Бидејќи $ABCD$ е тетивен трапез, тој е рамнокрак. Нека EM ја сече AB во точката Q. Од $\measuredangle ADB = \measuredangle QEB = 90^\circ$ следува дека $MQ \parallel AD$, т.е. $QBCM$ исто така е рамнокрак трапез. Ќе докажеме дека Kl е симетрала на MC (и QB соодветно). Точките B, C и E лежат на кружницата ω со дијаметар BE, која ги допира правата EM и кружницата $\gamma(B, \overline{BE})$. Радикалните оски на паровите кружници (Γ, γ), (Γ, ω),



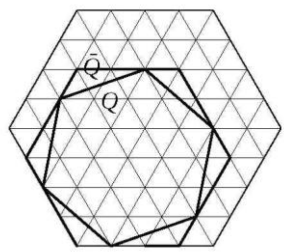
(γ,ω) се правите KL, BC и EM, соодветно, па затоа овие прави се сечат во нивниот радикален центар R. Но R лежи на симетралата на MC и $KL \perp QB$, па затоа KL е симетрала на MC (и QB соодветно). Сега

$$\measuredangle MKL = \measuredangle CKL = \measuredangle CDL = 90^\circ - \measuredangle DLK,$$

па затоа $KM \perp DL$.

4. Нека n е природен број. Правилен шестаголник со должина на страна еднаква на n е поделен со прави, кои се паралелни на неговите страни, на рамнострани триаголници чии страни се со должина 1. Определи го вкупниот број правилни шестаголници чии темиња воедно се и темиња на делбените рамнострани триаголници.

Решение. Нека P е дадениот шестаголник. Темињата на разгледуваните рамнострани триаголници ќе ги нарекуваме *јазли*. За секој шестаголник Q со темиња во јазлите го разгледуваме шестаголникот $\overline{Q}$ опишан околу Q со страни паралелни на страните на P (види цртеж десно). Темињата на $\overline{Q}$ се исто така јазли.



За $0 \le m < n$ шестаголникот $\overline{Q}$ со должина на страна $n-m$ може да се избере на $3m^2+3m+1=(m+1)^3-m^3$ начини. За дадениот шестаголник $\overline{Q}$, шестаголникот Q може да се избере на $n-m$ начини. Според тоа, вкупниот број можни шестаголници Q е еднаков на

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)((m+1)^3-m^3) &= \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)(m+1)^3 - \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3\\ &= \sum_{m=1}^{n}(n-m+1)m^3 - \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3\\ &= \sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$