Републички натпревар 2022

I година

1. За броевите a,b , $a\neq 1, b\neq 1$ важи $a+b=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2b-2a}{a^2b^2+3}.$$

Решение. Од $a+b=1$ следува $a=1-b$ и $b=1-a$, па затоа

$$\begin{aligned}\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}&=\frac{1-b}{(b-1)(b^2+b+1)}-\frac{1-a}{(a-1)(a^2+a+1)}\\
&=-\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{a^2+a+1}=\frac{b^2+b+1-a^2-a-1}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}\\
&=\frac{b^2-a^2+b-a}{a^2b^2+a^2b+a^2+ab^2+ab+a+b^2+b+1}\\
&=\frac{(b-a)(b+a)+b-a}{a^2b^2+ab(a+b)+a^2+ab+b^2+(a+b)+1}\\
&=\frac{b-a+b-a}{a^2b^2+ab+a^2+ab+b^2+1+1}\\
&=\frac{2b-2a}{a^2b^2+(a+b)^2+2}=\frac{2b-2a}{a^2b^2+1+2}\\
&=\frac{2b-2a}{a^2b^2+3},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

2. Определи го најмалиот природен број n за кој што $n^2+2022n$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Нека m е природен број таков што $n^2+2022n=m^2$. Последното равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$\begin{aligned}&(n+1011)^2-1011^2=m^2,\\
&(n+1011)^2-m^2=1011^2,\\
&(n+m+1011)(n-m+1011)=3^2\cdot 337^2.\end{aligned}$$

Нека $n+m+1011=p, n-m+1011=q$. Тогаш $pq=3^2\cdot 337^2$, $p,q\in\mathbb{N}$ и $p>q$. Според тоа, $(p,q)\in\{(1011^2,1), (3\cdot 337^2,3), (337^2,3^2), (3^2\cdot 337,337)\}$. Понатаму, од равенствата $n+m+1011=p, n-m+1011=q$ следува $m=\frac{p-q}{2}$ и $n=\frac{p+q}{2}-1011$. Најмалата вредност за n се добива за најмалата вредност на збирот $p+q$, односно за $p+q=3^2\cdot 337+337=(3^2+1)\cdot 337=3370$. Значи,

$$n=\frac{p+q}{2}-1011=\frac{3370}{2}-1011=674.$$

3. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^3+y^3=(x+y)^2.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2,$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0.$$

Од последната равенка добиваме $x+y=0$ или $x^2-xy+y^2-x-y=0$.

Нека $x+y=0$. Тогаш решенија се $(k,-k),\ k\in\mathbb{Z}$.

Нека $x^2-xy+y^2-x-y=0$. Оваа равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$2x^2-2xy+2y^2-2x-2y=0,$$
$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1=2,$$
$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2.$$

Од последната равенка следува $(x-y)^2,(x-1)^2,(y-1)^2\in\{0,1\}$. Можни се следниве случаи:

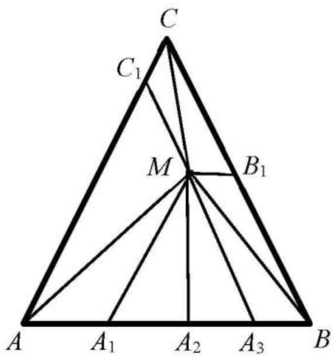
- Ако $(x-y)^2=0,(x-1)^2=1,(y-1)^2=1$, ги добиваме решенијата (0,0) и (2,2).
- Ако $(x-y)^2=1,(x-1)^2=0,(y-1)^2=1$, ги добиваме решенијата (1,0) и (1,2).
- Ако $(x-y)^2=1,(x-1)^2=1,(y-1)^2=0$, ги добиваме решенијата (0,1) и (2,1).

Значи, множеството решенија на дадената равенка е:

$$\{(k,-k),\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(2,2),(1,0),(1,2),(0,1),(1,2)\}.$$

4. Нека M е точка од внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC. Докажи дека

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2<2\overline{AB}^2.$$



Решение. Нека A_1,B_1,C_1 се точки на страните AB,BC,CA, соодветно такви што $MA_1\parallel CA$, $MB_1\parallel AB$ и $MC_1\parallel BC$. Да означиме $\overline{MA_1}=x$, $\overline{MB_1}=y$ и $\overline{MC_1}=z$.

Четириаголникот C_1AA_1M е рамнокрак трапез, бидејќи $MA_1\parallel CA$, а од $MC_1\parallel BC$ следува

$$\measuredangle MC_1A=\measuredangle BCA=60^\circ=\measuredangle A_1AC_1.$$

Затоа важи $\overline{AA_1}=\overline{MC_1}=z$. Нека A_2 и A_3 се точки на страната AB такви што $MA_2\perp AB$ и $MA_3\parallel BC$. Тогаш триаголникот

MA_2A_3 е рамностран и важи $\overline{A_1A_3} = \overline{MA_1} = x$ и $\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}\overline{MA_1} = \frac{x}{2}$. Понатаму, четириаголникот A_3BB_1M е паралелограм, па затоа $\overline{A_3B} = \overline{MB_1} = y$. Според тоа,

$$\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_3} + \overline{A_3B} = x + y + z.$$

Понатаму, од Питагоровата теорема следува

$$\begin{aligned}\overline{MA}^2 &= \overline{AA_2}^2 + \overline{MA_2}^2 = \overline{AA_2}^2 + \overline{MA_1}^2 - \overline{A_1A_2}^2 \\ &= (z + \tfrac{x}{2})^2 + x^2 - (\tfrac{x}{2})^2 = z^2 + zx + x^2.\end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека $\overline{MB}^2 = x^2 + xy + y^2$ и $\overline{MC}^2 = z^2 + zy + y^2$. Конечно,

$$\begin{aligned}\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 &= z^2 + zx + x^2 + x^2 + xy + y^2 + y^2 + yz + z^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) - 3(xy + yz + zx) \\ &< 2(x + y + z)^2 = 2\overline{AB}^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

II година

1. Нека k е природен број и $z_1, z_2, ..., z_{2022}$ се ненулти комплексни броеви со еднаков модул такви што $z_1^k + z_2^k + ... + z_{2022}^k = 0$. Докажи дека

$$\frac{1}{z_1^k} + \frac{1}{z_2^k} + ... + \frac{1}{z_{2022}^k} = 0.$$

Решение. Нека $|z_1| = |z_2| = ... = |z_{2022}| = r > 0$. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_1^k} + \frac{1}{z_2^k} + ... + \frac{1}{z_{2022}^k} &= \frac{1}{z_1^k} \cdot \frac{\overline{z_1}^k}{\overline{z_1}^k} + \frac{1}{z_2^k} \cdot \frac{\overline{z_2}^k}{\overline{z_2}^k} + ... + \frac{1}{z_{2022}^k} \cdot \frac{\overline{z_{2022}}^k}{\overline{z_{2022}}^k} \\ &= \frac{\overline{z_1}^k}{r^{2k}} + \frac{\overline{z_2}^k}{r^{2k}} + ... + \frac{\overline{z_{2022}}^k}{r^{2k}} = \frac{\overline{z_1}^k + \overline{z_2}^k + ... + \overline{z_{2022}}^k}{r^{2k}} \\ &= \frac{1}{r^{2k}} \cdot \overline{z_1^k + z_2^k + ... + z_{2022}^k} = \frac{1}{r^{2k}} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

2. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(5 - 2x)^2 + (\tfrac{1}{2-x} - 1)^2 = 9.$$

Решение. Јасно, $x \neq 2$. Воведуваме замена $2 - x = t$. Сега $5 - 2x = 2t + 1$, па затоа последователно ги добиваме равенките

$$(1 + 2t)^2 + (\tfrac{1}{t} - 1)^2 = 9,$$

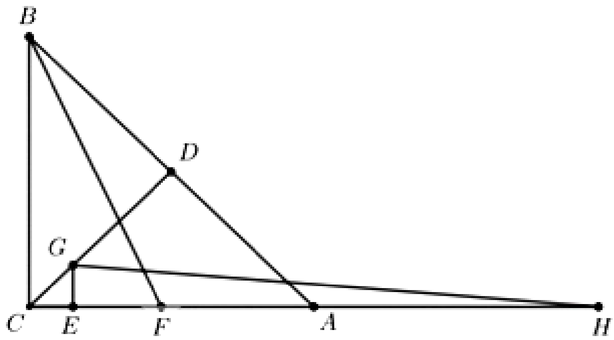
$$4t^2 + 4t + 1 + \tfrac{1}{t^2} - \tfrac{2}{t} + 1 = 9,$$

$$4t^2-4+\frac{1}{t^2}+4t-\frac{2}{t}=3,$$
$$(2t-\frac{1}{t})^2+2(2t-\frac{1}{t})=3.$$

Воведуваме смена $2t-\frac{1}{t}=z$ и ја добиваме равенката $z^2+2z-3=0$ чии решенија се 1 и -3. Од $2t-\frac{1}{t}=1$ следува $2t^2-t-1=0$ и ги добиваме решенијата $t_1=1$ и $t_2=-\frac{1}{2}$. Од $2t-\frac{1}{t}=-3$ следува $2t^2+3t-1=0$ и ги добиваме решенијата $t_{3/4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$. Конечно, со замена во $x=2-t$ ги добиваме решенијата $x_1=1$, $x_2=\frac{5}{2}$ и $x_{3/4}=\frac{11\pm\sqrt{17}}{4}$.

3. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. На катетата AC се избрани точки E и F такви што $2\overline{CE}=\overline{EF}$. Нормалата на катетата CA во точката E и тежишната линија на триаголникот ABC повлечена во темето C се сечат во точката G. Нека H е точка на правата CA таква што точката A е средина на отсечката CH. Докажи дека правите GF и BH се паралелни.

Решение. Нека $\overline{CE}=x$, $\overline{GE}=y$. Тогаш $\overline{EF}=2x$, $\overline{AF}=b-3x$ и $\overline{FH}=2b-3x$. Триаголниците CEG и ACB се слични (тие се правоаголни и $\measuredangle GCE=\measuredangle BAC$, бидејќи триаголникот ADC е рамнокрак), па затоа $\frac{\overline{GE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, т.е. $\frac{y}{x}=\frac{a}{b}$, од каде добиваме $y=\frac{ax}{b}$. Според тоа,



$$P_{BGF}=P_{BCF}-P_{GBCE}-P_{EFG}=\frac{3xa}{2}-\frac{a+y}{2}x-\frac{2xy}{2}=\frac{2xa-3xy}{2}=\frac{2xa-3x\frac{ax}{b}}{2}$$
$$=\frac{2abx-3ax^2}{2b}=\frac{ax}{b}\frac{2b-3x}{2}=\frac{y(2b-3x)}{2}=\frac{\overline{GE}\cdot\overline{FH}}{2}=P_{FHG}.$$

Заклучуваме дека триаголниците *BGF* и *HGF* се еднаквоплоштни и имаат иста страна, *GF*, па затоа нивните висини од темињата *B* и *H* се еднакви, односно растојанијата од темињата *B* и *H* до правата *GF* се еднакви. Оттука следува дека *GF* и *BH* се паралелни прави.

4. За природните броеви a,b,c, $a<b<c$ важи $\mathrm{NZD}(c-a,c-b)=1$. Нека постои цел број d таков што $a+d,b+d,c+d$ се должини на страни на правоаголен триаголник. Докажи дека постојат цели броеви l и m такви што $c+d=l^2+m^2$.

Решение. Од условот $a<b<c$ и од тоа што $a+d,b+d,c+d$ се должини на страни на правоаголен триаголник следува дека $(a+d)^2+(b+d)^2=(c+d)^2$, односно дека $d^2+(2a+2b-2c)d+(a^2+b^2-c^2)=0$. Решенија на последната квадратна равенка по непозната d се

$$d_{1/2}=-(a+b-c)\pm\sqrt{(a+b-c)^2-(a^2+b^2-c^2)}\,,$$

т.е.

$$d_{1/2}=-(a+b-c)\pm\sqrt{2(c-a)(c-b)}\,.$$

Бројот d е цел број, па затоа $2(c-a)(c-b)$ е точен квадрат на природен број, т.е. $2(c-a)(c-b)=x^2, x\in\mathbb{N}$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(c-a,c-b)=1$, од последното равенство следува $c-a=2p^2$ и $c-b=q^2$, или $c-a=p^2$ и $c-b=2q^2$, при што и во двата случаја $p,q\in\mathbb{N}$ и $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Оттука следува $d_{1/2}=-(a+b-c)\pm 2pq$.

Нека $c-a=2p^2$ и $c-b=q^2$. Имаме

$$c+d=c-(a+b-c)\pm 2pq=c-a+c-b\pm 2pq=2p^2+q^2\pm 2pq=(p\pm q)^2+p^2\,.$$

Значи, $c+d=l^2+m^2$ каде $l=p\pm q, m=p$. Случајот $c-a=p^2$ и $c-b=2q^2$ е потполно идентичен, при што $l=p\pm q, m=q$.

III година

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$y^3=x^3+8x^2-6x+8\,. \tag{1}$$

Решение. Од (1) следува дека за секој реален број x важи

$$y^3-(x+1)^3=y^3-x^3-3x^2-3x-1=5x^2-9x+7=5(x-\tfrac{9}{10})^2+\tfrac{59}{20}>0\,,$$

т.е. $y>x+1$ и за секој природен број x важи

$$y^3-(x+3)^3=y^3-x^3-9x^2-27x-27=-(x^2+33x+19)<0\,,$$

т.е. $y<x+3$. Решенијата на равенката (1) ги бараме во множеството природни броеви, па затоа од $x+1<y<x+3$ следува дека единствена можност е $y=x+2$. Со замена во (1) ја добиваме равенката

$$(x+2)^3=x^3+8x^2-6x+8\,,$$

која е еквивалентна со равенката

$$x^2-9x=0.$$

Но, $x\in\mathbb{N}$, па од последната равенка добиваме $x=9$, што значи $y=11$.

2. Определи ги сите реални броеви a и b ($a<b$) за кои важи

$$|\lg(a+1)|=|\lg(-\tfrac{b+1}{b+2}+1)| \text{ и } |\lg(10a+6b+22)|=4\lg 2.$$

Решение. Јасно, $0<a+1$, а според условот на задачата точни се неравенствата $0<a+1<b+1<b+2$. Понатаму, од $|\lg(a+1)|=|\lg(-\frac{b+1}{b+2}+1)|$ следува

$$|\lg(a+1)|=|\lg(-\tfrac{b+1}{b+2}+1)|=|\lg\tfrac{1}{b+2}|=|-\lg(b+2)|=|\lg(b+2)|,$$

па затоа имаме два случаја.

Случај 1. Ако $a+1=b+2$, т.е. $a=b+1$, тогаш од вториот услов следува

$$|\lg(16b+32)|=\lg 16,$$

па затоа $16b+32=16$ или $16b+32=\frac{1}{16}$, односно $b_1=-1$ или $b_2=-2+\frac{1}{256}$, но и двете решенија противречат на условот $0<b+1$.

Случај 2. Ако $a+1=\frac{1}{b+2}$, тогаш од вториот услов следува

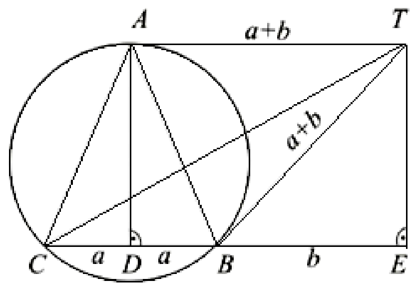
$$|\lg(6(b+2)+\tfrac{10}{b+2})|=\lg 16,$$

па затоа $6(b+2)+\frac{10}{b+2}=16$ или $6(b+2)+\frac{10}{b+2}=\frac{1}{16}$. Воведуваме смена $b+2=u$. Во првиот случај добиваме $6u^2-16u+10=0$, па затоа $u_1=1$ и $u_2=\frac{10}{6}$, т.е. $b_1=-1$ и $b_2=-\frac{1}{3}$. Решението $b=-1$ не го задоволува условот $0<b+1$, а за $b=-\frac{1}{3}$ добиваме $a=-\frac{2}{5}$. Во вториот случај ја добиваме равенката $96u^2-u+160=0$ која нема реални решенија.

Конечно, $a=-\frac{2}{5}$ и $b=-\frac{1}{3}$ се единствените реални броеви за кои се исполнети дадените равенства.

3. Тангентите повлечени од точка *T* кон кружница *k* ја допираат кружницата во точки *A* и *B*. Нека *C* е точка од кружницата, различна од точките *A* и *B* , таква што $\overline{AB}=\overline{AC}$. Докажи дека $\measuredangle TCB\leq 30^\circ$.

Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак. Нека *D* е подножјето на висината спуштена од врвот *A*. Јасно, центарот на кружницата лежи на *AD*, а заради фактот дека *AT* е тангента следи дека $AT\perp AD$. Нека *E* е точка таква да *ADET* е правоаголник.



Означуваме $\overline{CD}=\overline{DB}=a$, $\overline{BE}=b$. Тогаш $\overline{BT}=\overline{AT}=a+b$. Тврдењето на задачата $\measuredangle TCB \leq 30^\circ$ е еквивалентно со $\cos\measuredangle TCB \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, односно $\overline{CE} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CT}$, т.е. $\overline{CE}^2 \geq \frac{3}{4}\overline{CT}^2$. Од Питагоровата теорема применета на триаголниците CTE и BTE следува

$$\overline{CT}^2=\overline{CE}^2+\overline{TE}^2=\overline{CE}^2+\overline{BT}^2-\overline{BE}^2=(2a+b)^2+(a+b)^2-b^2=5a^2+b^2+6ab\,.$$

Според тоа, неравенството $\overline{CE}^2 \geq \frac{3}{4}\overline{CT}^2$ е еквивалентно со неравенството

$$(2a+b)^2 \geq \tfrac{3}{4}(5a^2+b^2+6ab),$$

т.е. со точното неравенство $(a-b)^2 \geq 0$, со што е докажано тврдењето на задачата.

4. Ако за реалните броеви x и y важи равенството $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$, најди ја најмалата вредност на изразот x^2+y^2 и определи за кои вредности на x и y се достигнува таа.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$(\tfrac{x+5}{14})^2+(\tfrac{y-12}{14})^2=1,$$

па затоа постои $\theta\in[0,2\pi)$ таков што $\frac{x+5}{14}=\cos\theta,\ \frac{y-12}{14}=\sin\theta$. Според тоа,

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(14\cos\theta-5)^2+(14\sin\theta+12)^2=365+24(12\sin\theta-5\cos\theta)\\&=365+364(\tfrac{12}{13}\sin\theta-\tfrac{5}{13}\cos\theta)\\&=365+364(\cos\varphi\sin\theta-\sin\varphi\cos\theta)\\&=365+364\sin(\theta-\varphi)\\&\geq 365-364=1\end{aligned}$$

каде φ е помалиот остар агол на правоаголниот триаголник со страни 5, 12 и 13. Според тоа, најмалата вредност на изразот x^2+y^2 е еднаква на 1 и истата се достигнува за $\theta-\varphi=\frac{3\pi}{2}$, односно за $\theta=\frac{3\pi}{2}+\varphi$. Во случајов, бидејќи $\sin\varphi=\frac{5}{13}$ и $\cos\varphi=\frac{12}{13}$ добиваме

$$x=14\cos\theta-5=14\sin\varphi-5=\tfrac{5}{13},\ y=14\sin\theta+12=14(-\cos\varphi)+12=-\tfrac{12}{13}\,.$$

IV година

1. Нека $n>1$ е даден природен број. Докажи дека не постои нетривијална бесконечна аритметичка прогресија чии членови се $n-$ти степени на природни броеви.

Решение. Нека $a_1^n, a_2^n, a_3^n, ...$ се членови на бесконечна аритметичка прогресија. Бидејќи членовите на низата се различни природни броеви (низата е нетривијална), добиваме дека мора да важи $a_1 < a_2 < a_3 < ...$. Од условот за аритметичка прогресија за секој $k \geq 2$ важи $a_{k+1}^n - a_k^n = a_k^n - a_{k-1}^n$, па затоа

$$(a_{k+1} - a_k)(a_{k+1}^{n-1} + a_{k+1}^{n-1}a_k + ... + a_k^{n-1}) = (a_k - a_{k-1})(a_k^{n-1} + a_k^{n-1}a_{k-1} + ... + a_{k-1}^{n-1}). \qquad (1)$$

Бидејќи

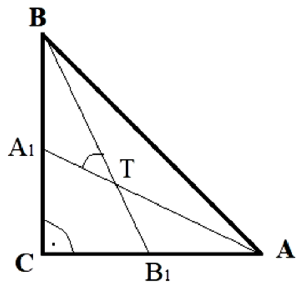
$$a_{k+1}^{n-1} + a_{k+1}^{n-1}a_k + ... + a_k^{n-1} < a_k^{n-1} + a_k^{n-1}a_{k-1} + ... + a_{k-1}^{n-1},$$

од (1) следува дека за секој $k \geq 2$ важи $a_{k+1} - a_k < a_k - a_{k-1}$. Според тоа,

$$a_2 - a_1 > a_3 - a_2 > a_4 - a_3 > ...,$$

т.е. имаме бесконечна строго монотоно опаѓачка низа природни броеви, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

2. Тежишните линии повлечени кон катетите во правоаголен триаголник зафаќаат агол φ. Ако е познато дека $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$, најди ги аглите на триаголникот.



Решение. Нека $\triangle ABC$ е со прав агол во темето C, катети $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ и хипотенуза $\overline{AB} = c$. Нека T е тежиштето на триаголникот, A_1 и B_1 се средини на страните BC и AC, соодветно, а должините на тежишните линии се $\overline{AA_1} = t_a$ и $\overline{BB_1} = t_b$. Од $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ следува $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. Ако искористиме дека $\measuredangle ATB_1 = \measuredangle A_1TB = \varphi$ и $\measuredangle ATB = 180^\circ - \varphi$, со примена на косинусната теорема во триаголниците TA_1B, TB_1A и TAB добиваме

$$\frac{a^2}{4} = \frac{t_a^2}{9} + \frac{4t_b^2}{9} - \frac{4t_at_b\cos\varphi}{9},$$

$$\frac{b^2}{4} = \frac{t_b^2}{9} + \frac{4t_a^2}{9} - \frac{4t_at_b\cos\varphi}{9},$$

$$c^2 = \frac{4t_a^2}{9} + \frac{4t_b^2}{9} + \frac{8t_at_b\cos\varphi}{9}.$$

Од Питагоровата теорема и горните равенства, по средувањето на изразите, добиваме

$$\frac{20t_a^2}{9} + \frac{20t_b^2}{9} - \frac{32t_at_b\cos\varphi}{9} = \frac{4t_a^2}{9} + \frac{4t_b^2}{9} + \frac{8t_at_b\cos\varphi}{9}.$$

Ако во последното равенство ставиме $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, добиваме

$$\frac{16}{9}(t_a - t_b)^2 = 0,$$

па затоа $t_a = t_b$, т.е. триаголникот е рамнокрак правоаголен. Значи, аглите на триаголникот се $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

3. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$k!l! = k! + l! + m!.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме $k \geq l$. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $k! = \frac{k!}{l!} + 1 + \frac{m!}{l!}$. Во последната равенка три члена се природни броеви, па затоа и $\frac{m!}{l!}$ мора да е природен број, што значи дека $m \geq l$. Понатаму, збирот на десната стрна е поголем или еднаков на 3, па затоа мора да е $k \geq 3$, што значи дека $k!$ е парен број. Последното значи дека точно еден од броевите $\frac{k!}{l!}, \frac{m!}{l!}$ е непарен број.

1) Нека претпоставиме дека $\frac{k!}{l!}$ е непарен и $\frac{m!}{l!}$ е парен број. Тогаш или $k = l$ или $k = l + 1$ и l е парен, при што $m \geq l + 1$. Ако $k = l$, тогаш $k! = 2 + \frac{m!}{l!}$.
   - Ако $k = 3$, тогаш решение е $k = l = 3$ и $m = 4$. Ако $k > 3$, тогаш $k!$ е делив со 3, од каде следува дека $k! - 2$ не е делив со 3, што значи дека $m = k + 1$ или $m = k + 2$. Оттука следува дека
   $$\frac{m!}{k!} = k + 1 \text{ или } \frac{m!}{k!} = (k+1)(k+2),$$
   па затоа $k! = k + 3$ или $k! = 2 + (k+1)(k+2)$. Со непосредна проверка се добива дека $k = 3$ и $k = 4$ не се решенија, а за $k > 4$ левата страна на равенките е поголема од десната.
   - Ако $k = l + 1$ и l е парен, тогаш треба да се реши равенката $(l+1)! = l + 2 + \frac{m!}{l!}$. Левата страна на равенката и $\frac{m!}{l!}$ се деливи со $l + 1$, па затоа и $l + 2$ треба да е делив со $l + 1$, што не е можно.
2) Нека $\frac{k!}{l!}$ е парен и $\frac{m!}{l!}$ е непарен број. Тогаш или $m = l$ или $m = l + 1$ и l е парен.
   - Ако $m = l$, тогаш равенката се сведува на $k!l! = k! + 2l!$, односно на $\frac{k!}{l!}(l! - 1) = 2$. Бидејќи $\frac{k!}{l!}$ е парен, добиваме дека $l! - 1 = 1$, т.е. $l = 2$ и $k! = 4$, што не е можно.
   - Ако $m = l + 1$ и l е парен, тогаш равенката е $k!(l! - 1) = (l + 2)l!$. Бидејќи $l!$ и $l! - 1$ се заемно прости, добиваме дека $l + 2$ мора да е делив со $l! - 1$. Последното е можно само за $l = 2$ и тогаш добиваме $k! = 8$, што не е можно.

Од претходните разгледувања следува дека единствено решение на дадената равенка е $k = l = 3$ и $m = 4$.

4. Нека $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$ е полином со реални коефициенти таков што

$$p(x)p(2022x^4)=p(2022x^5+x)\,. \tag{1}$$

Докажи дека $p(x)$ нема реални корени.

Решение. Нека k е најмалиоит индекс за кој важи $a_k\neq 0$. Имаме

$$p(2022x^4)=a_n 2022^n x^{4n}+a_{n-1}2022^{n-1}x^{4n-4}+...+a_k 2022^k x^{4k}$$

$$p(x)p(2022x^4)=a_n^2 2022^n x^{5n}+...+a_k^2 2022^k x^{5k}$$

$$p(2022x^5+x)=a_n(2022x^5+x)^n+...+a_k(2022x^5+x)^k=a_n 2022^n x^{5n}+...+a_kx^k.$$

Од (1) и последните две равенства следува $k=5k$, па затоа $k=0$. Значи, $a_0\neq 0$, од каде следува дека $p(0)=a_0\neq 0$. Нека претпоставиме дека $x_0\neq 0$ е реален корен на полиномот $p(x)$. Тогаш $p(2022x_0^5+x_0)=0$, т.е. $x_1=2022x_0^5+x_0$ е реален корен на $p(x)$. Продолжувајќи ја постапката формираме низа $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ за која важи $x_m=2022x_{m-1}^5+x_{m-1}$ и притоа секој нејзин член е корен на $p(x)$. Но, $\frac{x_m}{x_{m-1}}=2022x_{m-1}^4+1>1$, па затоа оваа низа е растечка, што значи дека $p(x)$ има бесконечно многу реални корени, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $p(x)$ нема реален корен.