

Svojstva i primjena medijana i aritmetičke sredine

Vedran Novoselac* Snježana Rimac-Drlje[†]

Sažetak

U radu su predstavljeni medijan i aritmetička sredina podataka, te svojstva regresijske i skalirane ekvivarijantnosti koje posjeduju. Njihova primjena je predstavljena u području koje se bavi procesiranjem slika. Medijan i aritmetička sredina su u tom području implementirani u tzv. filtere koji se koriste pri uklanjanju šumova koji se pojavljuju u digitalnom zapisu slike. U radu se promatraju dvije vrste šumova koji se generiraju dobro poznatim matematičkim modelima: impulsni, i Gaussov šum. Pokazali smo da je kvaliteta rekonstrukcije degradiranih slika spomenutim filterima direktno povezana sa svojstvima medijana, odnosno aritmetičke sredine, u smislu problema najmanjih apsolutnih odstupanja, odnosno problemom najmanjih kvadrata. Svojstva filtera u tom smislu dolaze do izražaja s obzirom na distribuciju pogreške podataka, odnosno generirani model šuma.

Ključne riječi: *medijan, aritmetička sredina, skalirana ekvivarijantnost, regresijska ekvivarijantnost, procesiranje slike*

*Strojarski fakultet, Sveučilište u Osijeku, Trg I. B. Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, email: vnovosel@sfsb.hr

[†]Elektrotehnički fakultet, Sveučilište u Osijeku, Kneza Trpimira 2b, HR-31000 Osijek, email: srimac@etfos.hr

Properties and application of median and mean

Abstract

In this paper we present the scale and regression equivariant properties of median and mean. Their application is presented in image processing where they are implemented in image denoising filters. We consider two types of image noise: impulse and Gauss noise. We show that the denoising quality of the median and the mean filter is related to the properties of the least absolute deviation and the least square problem, respectively. These filter properties are manifested in the sense of data error distribution generated by the image noise models.

Keywords: *median, mean, scale equivariant, regression equivariant, image processing*

1 Uvod

Za zadani realni vektor podataka $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T$, $m \geq 1$, treba odrediti realni broj koji na neki način reprezentira taj vektor podataka. U tu svrhu se najčešće koriste:

- medijan koji označavamo s $\text{med}(\mathbf{y})$, sa svojstvom

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m |y_i - x| = \sum_{i=1}^m |y_i - \text{med}(\mathbf{y})|, \quad (1)$$

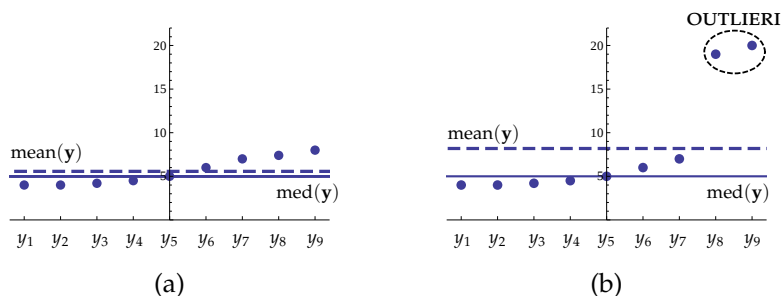
- aritmetička sredina koju označavamo s $\text{mean}(\mathbf{y})$, sa svojstvom

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m (y_i - x)^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \text{mean}(\mathbf{y}))^2. \quad (2)$$

Medijan je takav broj koji ima svojstvo da je suma apsolutnih odstupanja brojeva y_i do nekog čvrstog broja najmanja onda ako je taj broj upravo $\text{med}(\mathbf{y})$. Medijan vektora podataka, što detaljnije objašnjavamo u poglavlju 2.1, je broj koji se nalazi na središnjoj poziciji sortiranog vektora, odnosno $\text{med}(\mathbf{y}) = y_{\frac{m+1}{2}}$ u slučaju kada je m neparan, te $\text{med}(\mathbf{y}) = (y_{\frac{m}{2}} + y_{\frac{m}{2}+1})/2$ kada je m paran. Iz tog razloga medijan podataka posjeduje robusna svojstva na *outliere*, odnosno podatke koji se iz nekog razloga promijenile, npr. zbog pogreške pri iščitavanju i pohranjivanju podataka, prolasku podataka kroz šumoviti kanal kroz koji se prenose podaci itd. Promotrimo na primjer vektor $[1, 1, 2, 2, 2, 3, 3]^T$, te pretpostavimo da se npr. desila pogreška

pri pohrani podataka što rezultira npr. s ishodom $[1, 1, 2, 2, 2, 100, 300]^T$. U oba slučaja medijan iznosi 2, iz čega se uočava robusnost medijana. Svojstva robusnosti medijana dolaze do izražaja ako se unutar vektora podataka nalazi manje od 50% outliera (vidite [10]). Prema tome, *metodu sume najmanjih apsolutnih odstupanja*¹ prezentirane s (1), je smisleno koristiti ako se pojavljuju outlieri.

Aritmetička sredina je takav broj koji ima svojstvo da je suma kvadrata odstupanja brojeva y_i od nekog čvrstog broja najmanja upravo kada je taj broj aritmetička sredina, odnosno $\text{mean}(\mathbf{y})$. U poglavlju 2.1 je pokazano da je $\text{mean}(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$. Ako na prethodnom primjeru vektora podataka izračunamo aritmetičku sredinu, za originalni vektor dobivamo vrijednost 2, dok se za vektor s outlierima dobiva 58.29. Ovaj rezultat upućuje na osjetljivost aritmetičke sredine na outliere. U tom se smislu princip *sume najmanjih kvadratnih odstupanja*² prezentirane s (2), koristi ako su pogreške u podacima normalno distribuirane s očekivanjem 0 i pozitivnom varijancom. Na sljedećoj slici je prezentiran vektor podataka (slika 1(a)). Ako se dodaju outlieri (slika 1(b)), uočavaju se spomenuta svojstva robusnosti medijana, te osjetljivosti aritmetičke sredine na outliere.



Slika 1: Ilustracija problema (1) i (2): (a) originalni podaci; (b) isti podaci kao u (a), ali s dva outliera

U poglavlju 3 prezentiramo medijan i aritmetičku sredinu vektora podataka u području koje se bavi procesiranjem slika (vidite [2, 6, 9]). U tom području se medijan i aritmetička sredina koriste prilikom rekonstrukcije šumom degradiranih slika. Šumovi se u digitalnom zapisu slike manifestiraju kao outlieri, a nastaju uslijed različitih čimbenika, npr. prolaskom poda-

¹Princip *najmanjih apsolutnih odstupanja* pripisuje se hrvatskom znanstveniku J. R. Boškoviću (1711.–1787.)

²Princip *sume najmanjih kvadratnih odstupanja* pripisuje se njemačkom matematičaru C. F. Gaussu (1777.–1855.)

taka kroz šumoviti kanal, kvaru uređaja, nepravilnosti optike itd. U tom se području šumovi generiraju matematičkim modelima koji simuliraju šumove (poglavlje 3.1). U članku promatramo dvije vrste šuma, *impulsni*, i *Gaussov šum*. Pokazat ćemo da su svojstva medijana i aritmetičke sredine prilikom rekonstrukcije slika degradiranih takvim šumovima, direktno vezana s njihovim svojstvima.

2 Svojstva medijana i aritmetičke sredine

Medijan i aritmetičku sredinu podataka određujemo rješavanjem problema minimizacije (1) i (2), što možemo zapisati kao

$$\min_{x \in \mathbb{R}} F_p(x), \quad p = 1, 2, \quad (3)$$

gdje je F_p zapisan u obliku

$$F_p(x) = \|\mathbf{y} - x\mathbf{e}\|_p, \quad \mathbf{e} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^m, \quad (4)$$

pri čemu je $\|\cdot\|_p$ norma definirana na prostoru $\mathbb{R}^m$.

U nastavku ćemo opisati svojstva funkcije F_p u svrhu dokazivanja skalirane i regresijske ekvivarijantnosti medijana i aritmetičke sredine.

2.1 Pregled svojstava funkcije F_p

Prisjetimo se da je funkcija $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna na $\mathbb{R}$ ako za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ i svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y). \quad (5)$$

Dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 2.1. *Funkcija $F_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna na $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$ i $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$\begin{aligned} F_p(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \|\mathbf{y} - (\lambda x + (1 - \lambda)y)\mathbf{e}\|_p \\ &= \|\lambda(\mathbf{y} - x\mathbf{e}) + (1 - \lambda)(\mathbf{y} - y\mathbf{e})\|_p \\ &\leq \lambda\|\mathbf{y} - x\mathbf{e}\|_p + (1 - \lambda)\|\mathbf{y} - y\mathbf{e}\|_p \\ &= \lambda F_p(x) + (1 - \lambda)F_p(y). \end{aligned}$$

□

Mala modifikacija dokaza sljedećeg teorema zapravo pokazuje kako je svaka konveksna funkcija definirana na otvorenom skupu, neprekidna.

Teorem 2.2. *Funkcija $F_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna.*

Dokaz. Treba dokazati da za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je

$$|F_p(x) - F_p(y)| < \varepsilon, \quad \text{za} \quad |x - y| \leq \delta.$$

Za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$ neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $x_1 < x < x_2$. Zbog konveksnosti F_p vrijedi

$$F_p(x) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} F_p(x_2) + \left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) F_p(x_1), \quad (6)$$

jer je

$$x = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 + \left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) x_1, \quad 0 < \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} < 1.$$

Rezultat (6) možemo zapisati kao

$$\frac{F_p(x) - F_p(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{F_p(x_2) - F_p(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad (7)$$

a dodavajući s desne strane nejednakosti (6) izraz $F_p(x_2) - F_p(x)$, raspisivanjem se može dobiti

$$\frac{F_p(x_2) - F_p(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{F_p(x_2) - F_p(x)}{x_2 - x}. \quad (8)$$

Odaberimo $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tako da je $x_0 < x_1 < x < x_2 < x_3$. Tada za $x_1 < y < x$ pomoću (7) i (8) dobivamo

$$\frac{F_p(x) - F_p(y)}{x - y} \leq \frac{F_p(x_3) - F_p(y)}{x_3 - y} \leq \frac{F_p(x_3) - F_p(x_2)}{x_3 - x_2}, \quad (9)$$

$$\frac{F_p(x) - F_p(y)}{x - y} \geq \frac{F_p(x) - F_p(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{F_p(x_1) - F_p(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (10)$$

Definirajmo C kao

$$C = \max \left\{ \frac{|F_p(x_1) - F_p(x_0)|}{x_1 - x_0}, \frac{|F_p(x_3) - F_p(x_2)|}{x_3 - x_2} \right\}.$$

Pomoću (9) i (10) dobivamo

$$-C \leq \frac{F_p(x) - F_p(y)}{x - y} \leq C,$$

iz čega slijedi

$$|F_p(x) - F_p(y)| \leq C|x - y|. \quad (11)$$

Na isti se način pokazuje da nejednakost (11) vrijedi i za $x < y < x_2$, tj. (11) vrijedi za sve $x_1 < y < x_2$.

Neka je $\delta \leq \min\{\frac{\varepsilon}{C}, x - x_1, x_2 - x\}$. Tada za $|x - y| < \delta$ vrijedi

$$|F_p(x) - F_p(y)| \leq C|x - y| \leq C\delta \leq C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

što dokazuje neprekidnost funkcije F_p u proizvoljnoj točki x . $\square$

Teorem 2.3. *Funkcija $F_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ postiže minimum, te vrijedi:*

I. F_1 minimum postiže u

$$\text{med}(\mathbf{y}) = \begin{cases} y_{l+1}, & m = 2l + 1, \\ \lambda y_l + (1 - \lambda)y_{kl+1}, & m = 2l, \end{cases} \quad (12)$$

gdje je $\lambda \in [0, 1]$.

II. F_2 minimum postiže u

$$\text{mean}(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i. \quad (13)$$

Dokaz.

I. Pretpostavimo da je vektor podataka $\mathbf{y}$ sortiran, odnosno $y_1 < y_2 < \dots < y_m$ (nije teško vidjeti da se isti rezultati postižu kada se u vektoru podataka nalaze isti podaci). Primijetimo da je funkcija F_1 linearna, dakle i derivabilna, na svakom od intervala

$$(-\infty, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{m-1}, y_m), (y_m, \infty),$$

s odgovarajućim koeficijentima smjera, odnosno derivacijama $k_i = 2i - m$, $i = 0, 1, \dots, m$, koje redom korespondiraju spomenutim intervalima.

Pretpostavimo da je $m = 2l + 1$. Niz (k_i) raste, odnosno vrijedi

$$k_0 < k_1 < \dots < k_l \leq 0 < k_{l+1} < \dots < k_m.$$

Prema tome, F_1 strogo pada na intervalu $(-\infty, y_{l+1})$, te strogo raste na intervalu (y_{l+1}, ∞) što povlači da F_1 minimum postiže u y_{l+1} , odnosno $\text{med}(\mathbf{y}) = y_{l+1}$.

Pretpostavimo da je $m = 2l$, u tom slučaju funkcija F_1 strogo pada na intervalu $(-\infty, y_l)$, konstantna je na $[y_l, y_{l+1}]$, te strogo raste na intervalu (y_{l+1}, ∞) . Iz toga zaključujemo da F_1 minimum postiže na intervalu $[y_l, y_{l+1}]$, odnosno $\text{med}(\mathbf{y}) = \lambda y_l + (1 - \lambda)y_{l+1}$, $\lambda \in [0, 1]$.

II. Pošto je funkcija F_2 derivabilna, njezin minimum određujemo tražeći rješenje jednadžbe $\frac{\partial F_2(x)}{\partial x} = 0$. Nije teško vidjeti da je u tom slučaju rješenje $\text{mean}(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$. $\square$

U najopćenitijem slučaju vrijedi da svaki konveksni i neprekidni funkcional, s konveksnom domenom, postiže svoj globalni minimum (vidite [7, 11, 14]). Konveksni funkcional definiran na konveksnom skupu ima svojstvo da je točka u kojoj funkcional postiže lokalni minimum, ujedno točka u kojoj funkcional postiže globalni minimum (vidite [7]). Budući da je konveksna funkcija F_p definirana na $\mathbb{R}$, slijedi:

Teorem 2.4. *Ako je x_p^* točka lokalnog minimuma funkcije $F_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tada je x_p^* ujedno točka u kojoj F_p postiže globalni minimum.*

Dokaz. U točki x_p^* je lokalni minimum funkcije F_p , odnosno vrijedi

$$F_p(x_p^*) \leq F_p(x), \quad \forall x \in (x_p^* - \delta, x_p^* + \delta), \quad \text{za neki } \delta > 0.$$

Pretpostavimo suprotno, postoji točka u kojoj funkcija postiže globalni minimum, koji je manji od lokalnog minimuma u točki x_p^* , odnosno postoji $x_p^{**} \in \mathbb{R}$ takva da je $F_p(x_p^{**}) < F_p(x_p^*)$. Pošto je funkcija F_p definirana na $\mathbb{R}$, možemo izabrati neki $x \in (x_p^* - \delta, x_p^* + \delta)$ takav da je $x = \lambda x_p^* + (1 - \lambda)x_p^{**}$, za neki $\lambda \in (0, 1)$. Zbog konveksnosti funkcije F_p slijedi

$$\begin{aligned} F_p(x) &= F_p(\lambda x_p^* + (1 - \lambda)x_p^{**}) \\ &\leq \lambda F_p(x_p^*) + (1 - \lambda)F_p(x_p^{**}) \\ &< F_p(x_p^*) \end{aligned}$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom da je x_p^* lokalni minimum čime je dokazana tvrdnja teorema. $\square$

Teorem 2.5. *Neka je zadan vektor podataka $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, te $x_p^* \in \mathbb{R}$, $p = 1, 2$ takvi da je*

$$F_p(x_p^*) = \min_{x \in \mathbb{R}} F_p(x), \quad p = 1, 2. \quad (14)$$

Tada vrijedi:

I. *za proizvoljni $\alpha \in \mathbb{R}$, αx_p^* je rješenje problema*

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|\alpha \mathbf{y} - x \mathbf{e}\|_p. \quad (15)$$

II. *za proizvoljni $\beta \in \mathbb{R}$, $x_p^* + \beta$ je rješenje problema*

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|(\mathbf{y} + \beta \mathbf{e}) - x \mathbf{e}\|_p. \quad (16)$$

Dokaz.

I. Za $\alpha = 0$ tvrdnja je očigledna. Neka je $\alpha \neq 0$ i y_p^* rješenje problema (15), tada vrijedi

$$\|\alpha \mathbf{y} - y_p^* \mathbf{e}\|_p = |\alpha| \left\| \mathbf{y} - \left(\frac{y_p^*}{\alpha} \right) \mathbf{e} \right\|_p \geq |\alpha| \|\mathbf{y} - x_p^* \mathbf{e}\|_p,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako je $\frac{y_p^*}{\alpha} = x_p^*$.

II. Neka je y_p^* rješenje problema (16). Tada vrijedi

$$\|(\mathbf{y} + \beta \mathbf{e}) - y_p^* \mathbf{e}\|_p = \|\mathbf{y} - (y_p^* - \beta) \mathbf{e}\|_p \geq \|\mathbf{y} - x_p^* \mathbf{e}\|_p,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako je $y_p^* - \beta = x_p^*$. $\square$

Neposredno iz teorema 2.5 slijede sljedeća dva svojstva medijana i aritmetičke sredine:

i) *za proizvoljni $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\text{med}(\alpha \mathbf{y}) = \alpha \text{med}(\mathbf{y}), \quad (17)$$

$$\text{mean}(\alpha \mathbf{y}) = \alpha \text{mean}(\mathbf{y}). \quad (18)$$

ii) *za proizvoljni $\beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\text{med}(\mathbf{y} + \beta \mathbf{e}) = \text{med}(\mathbf{y}) + \beta, \quad (19)$$

$$\text{mean}(\mathbf{y} + \beta \mathbf{e}) = \text{mean}(\mathbf{y}) + \beta. \quad (20)$$

Uočimo da se prethodna svojstva mogu zapisati na sljedeći način:

$$\text{med}(\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{e}) = \alpha \text{med}(\mathbf{y}) + \beta, \quad (21)$$

$$\text{mean}(\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{e}) = \alpha \text{mean}(\mathbf{y}) + \beta. \quad (22)$$

Napomena 2.1. U literaturi (vidite primjerice [10]) se svojstvo I. iz teorema 2.5 pojavljuje pod nazivom ekvivarijantnost na skaliranje, a znači da ako vektor podataka $\mathbf{y}$ pomnožimo skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$, onda će rješenje novog problema biti jednako αx_p^* , što simbolički možemo pisati u obliku:

$$\mathbf{y} \longrightarrow \alpha \mathbf{y} \implies x_p^* \longrightarrow \alpha x_p^*. \quad (23)$$

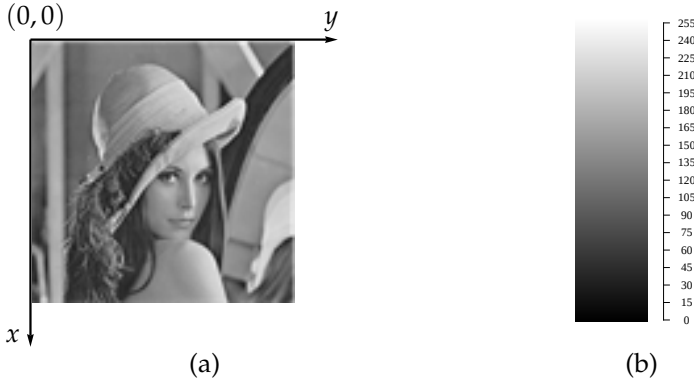
Svojstvo II. iz teorema 2.5 obično se naziva regresijska ekvivarijantnost, a znači da ako vektor podataka $\mathbf{y}$ promijenimo za $\beta \mathbf{e}$, $\beta \in \mathbb{R}$, onda će rješenje novog problema biti jednako $x_p^* + \beta$, što simbolički možemo pisati u obliku:

$$\mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{y} + \beta \mathbf{e} \implies x_p^* \longrightarrow x_p^* + \beta. \quad (24)$$

3 Primjena medijana i aritmetičke sredine u području koje se bavi s procesiranjem slike

Upotreba medijana i aritmetičke sredine je zastupljena u svim granama primijenjenog istraživanja. Njihovu primjenu ćemo prikazati u području koje se bavi procesiranjem slike. U tom se području median i aritmetička sredina implementiraju u *filtere* koji se koriste pri uklanjanju šumova koji se pojavljuju u digitalnom zapisu slike. Inače, sliku u digitalnom zapisu je moguće prezentirati funkcijom $f: \Omega \subset \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^s$, gdje domena Ω funkcije f prezentira pozicijske indekse piksela koji se u tom području dodjeljuju na način predstavljen u slici 2 (a). Vrijednost $f(i, j) \in \mathbb{Z}^s$ predstavlja intenzite boje piksela koju je moguće prikazati u različitim skalama. U radu smo promatrali slike prezentirane u monokromatskim nijansama sive boje, tzv. digitalna *grayscale level* reprezentacija slike (vidite [2, 5, 9]). U tom slučaju je $s = 1$, a skala je određena cjelobrojnim intervalom $[0, 255]$ prikazanu u slici 2 (b). Prema tome, slika veličine $M \times N$ se može prikazati matricno kao

$$[f(i, j)]_{(i, j) \in \Omega} = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, M-1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, M-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f(N-1, 0) & f(N-1, 1) & \cdots & f(N-1, M-1) \end{bmatrix}. \quad (25)$$



Slika 2: (a) prikaz monokromatske slike u koordinatnom sustavu; (b) cjelobrojna skala intenziteta sivih nijansi

3.1 Modeli šumova

U radu se promatraju dvije vrste šuma koji se u tom području generiraju pomoću matematičkih modela definiranih s (26), (29), gdje ρ predstavlja postotak degradiranosti slike. Inače, šumovi u slici se pojavljuju pri prolasku podataka kroz šumoviti kanal, pogreške pri pohranjivanju podataka itd. U našem radu smo promatrali sljedeće vrste šumova, gdje s $X = [x_{ij}]_{(i,j) \in \Omega}$ označavamo originalnu, a s $Y = [y_{ij}]_{(i,j) \in \Omega}$ degradiranu sliku:

- *impulsni šum*

$$y_{ij} = \begin{cases} \xi_{ij}, & \text{s vjerojatnošću } \rho, \\ x_{ij}, & \text{s vjerojatnošću } 1 - \rho, \end{cases} \quad (26)$$

gdje je ξ_{ij} slučajna varijabla koja opisuje vrijednost šuma. U tom području se impulsni šum naziva još *salt and pepper* ili *šum s fiksiranim vrijednostima* (kraće MŠ1- model šuma 1).

Za MŠ1 ξ_{ij} je definiran funkcijom gustoće

$$P_{\text{MŠ1}}(t) = \begin{cases} P_p, & \text{za } t = p, \\ P_s, & \text{za } t = s, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \quad (27)$$

gdje su P_p , i P_s , $P_p + P_s = 1$, $P_p, P_s \geq 0$, vjerojatnosti pojavljivanja piksela čije su vrijednosti redom jednake p , i s . Za "salt and pepper"

šum je uobičajeno uzimati maksimalne, odnosno minimalne vrijednosti intenziteta boja. Prema tome, u našem radu ćemo promatrati $p = 0$, i $s = 255$, te slučaj kada intenziteti imaju istu vjerojatnost pojavljivanja, odnosno $P_p = P_s = 0.5$.

- *Gaussov šum*

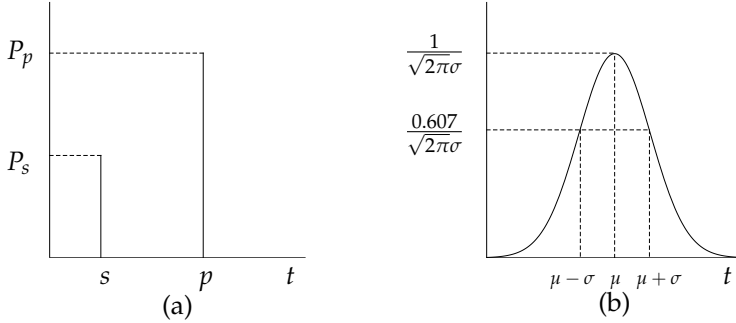
$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \xi_{ij}, & \text{s vjerojatnošću } \rho, \\ x_{ij}, & \text{s vjerojatnošću } 1 - \rho, \end{cases} \quad (28)$$

gdje je ξ_{ij} Gaussova slučajna varijabla, pa je funkcija gustoće definirana kao

$$P_{M\check{S}2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (29)$$

gdje je μ očekivanje, a σ standardna devijacija. U radu je promatran slučaj šuma s $\mu = 0$, i $\sigma = 30$. Gaussov šum kraće označavamo s MŠ2.

Spomenute funkcije gustoće (27), (29), koje redom definiraju modele šumova MŠ1, i MŠ2 su prikazane u slici 3.



Slika 3: PDF šumova: (a) salt and pepper; (b) Gaussov

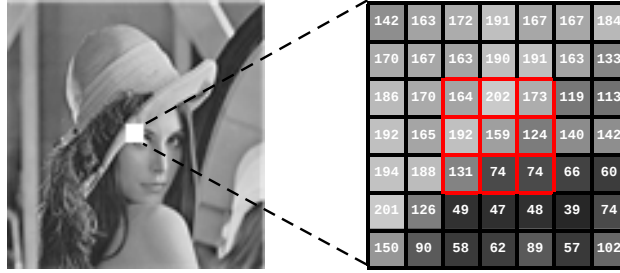
3.2 Opis procesiranja medijan i aritmetičkog filtera

Filteri u tom području procesiraju svaki piksel y_{ij} , $(i, j) \in \Omega$, degradirane slike Y , stvarajući na taj način njezinu rekonstrukciju $X^* = [x_{ij}^*]_{(i,j) \in \Omega}$, gdje smo s x_{ij}^* označili rezultat filtera za y_{ij} , s korespondirajućim pozicijama. Filteri su konstruirani na način da procesiraju različita *susjedstva* promatranog piksela y_{ij} . U tom se području najčešće koriste tzv. *filtrirajući prozori*

definirani kao

$$Y_{ij} = \{y_{hl} : |h - i| \leq \omega \ \& \ |j - l| \leq \omega\}, \quad \omega \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Prilikom uklanjanja šumova sa slika najčešće se koristi 3×3 filtrirajući prozor, odnosno $\omega = 3$ (vidite sliku 4).



Slika 4: Prikaz 3×3 filtrirajućeg prozora na dijelu slike $[47, 53] \times [47, 53]$

Može se primijetiti da se Y_{ij} odnosi samo na piksele koji se nalaze u "unutrašnjosti" slike, odnosno na (i, j) pozicijama za koje vrijedi $0 \leq i + h \leq N - 1, 0 \leq j + l \leq M - 1$. Inače, kada filter procesuirao piksele na krajnjim rubovima slike, postupak filtriranja se provodi na *krajnjim filtrirajućim prozorima*, ili se već definirani filtrirajući prozor nadopunjava s nekim drugim pikselima iz Y_{ij} , pa se u tom slučaju filtriranje konstantno odvija na zadanom prozoru. U radu se koristi pristup nadopunjavanja već definiranog prozora koji se može provesti na više načina, npr. osnom simetrijom s obzirom na i -tu koordinatu, odnosno j -tu koordinatu unutra Y_{ij} , ovisno o poziciji rubnog piksela.

Zbog jasnoće zapisa, filtrirajuće prozore Y_{ij} zapisujemo kao vektor

$$\mathbf{y}_k = [y_k^1, \dots, y_k^m]^T, \quad k = i \cdot N + j, \quad m = \omega^2. \quad (31)$$

U tom slučaju će za $\omega = 3$ vrijednost $y_k^{\frac{m+1}{2}}$ prezentirati centralni piksel y_{ij} promatranog prozora Y_{ij} .

3.2.1 Medijan i aritmetički filter

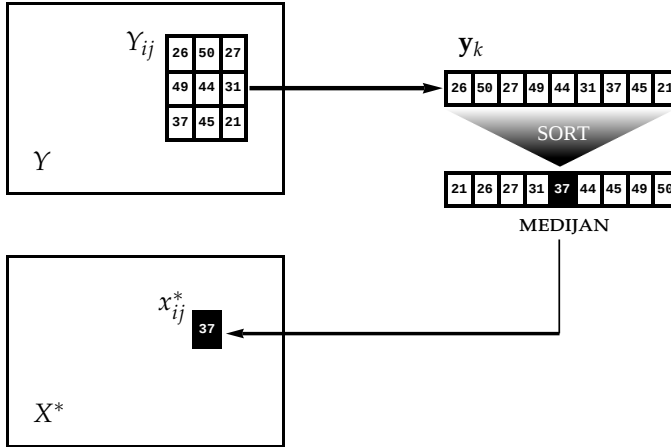
Kao što smo rekli, filteri svaki piksel y_{ij} procesuiraju kao odgovarajući filtrirajući prozor Y_{ij} , stvarajući na taj način rekonstruiranu sliku X^* . Jedni

od takvih filtera su *medijan i aritmetički filter* (vidite [2, 5, 9]).

Medijan filter (kraće MFL_1) stvara rekonstrukciju X^* od degradirane slike Y , na način da se svaki piksel iz X^* dobije kao

$$x_{ij}^* = \text{med}(\mathbf{y}_k), \quad \forall (i, j) \in \Omega, \quad k = i \cdot N + j, \quad (32)$$

gdje vektor $\mathbf{y}_k$ predstavlja filtrirajući prozor odgovarajućeg piksela y_{ij} degradirane slike Y definiran s (31). Zbog robusnih svojstava medijana, MFL_1 posjeduje dobra svojstva uklanjanja impulsnih šumova. Prema tome, MFL_1 će dobro uklanjati impulsne šumove, ukoliko impulsi (outlieri) ne premašuju 50% podataka (vidite [10]). Robusnost medijana MFL_1 filteru daje vrlo dobra svojstva prilikom filtriranja rubova i finih detalja slike što pokazuju rezultati filtriranja prikazani u sljedećem poglavlju. Slika 5 prikazuje shemu procesuiranja MFL_1 filtera.



Slika 5: Shema medijan filtera

Aritmetički filter (MFL_2), na analogan način kao MFL_1 , stvara rekonstrukciju X^* iz Y kao

$$x_{ij}^* = \text{mean}(\mathbf{y}_k), \quad \forall (i, j) \in \Omega, \quad k = i \cdot N + j. \quad (33)$$

MFL_2 ne uklanja dobro impulsne šumove jer ne posjeduje robusna svojstva na outlieri. Osjetljivost aritmetičke sredine na outlieri uzrokuje gubljenje

finih detalja i rubova slike, pa MFL_2 stvara efekt zamućivanja slike. MFL_2 pokazuje dobra svojstva pri uklanjanju Gaussovog šuma.

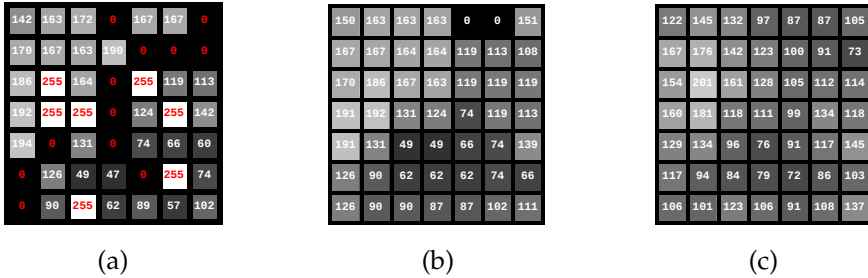
3.3 Mjerenje kvalitete rekonstruiranih slika

Kvalitetu rekonstruirane slike X^* je uobičajeno mjeriti pomoću MSE (mean squared error), i MAE (mean absolute error), definiranih kao

$$MSE = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} (x_{ij} - x_{ij}^*)^2}{N \times M}, \quad (34)$$

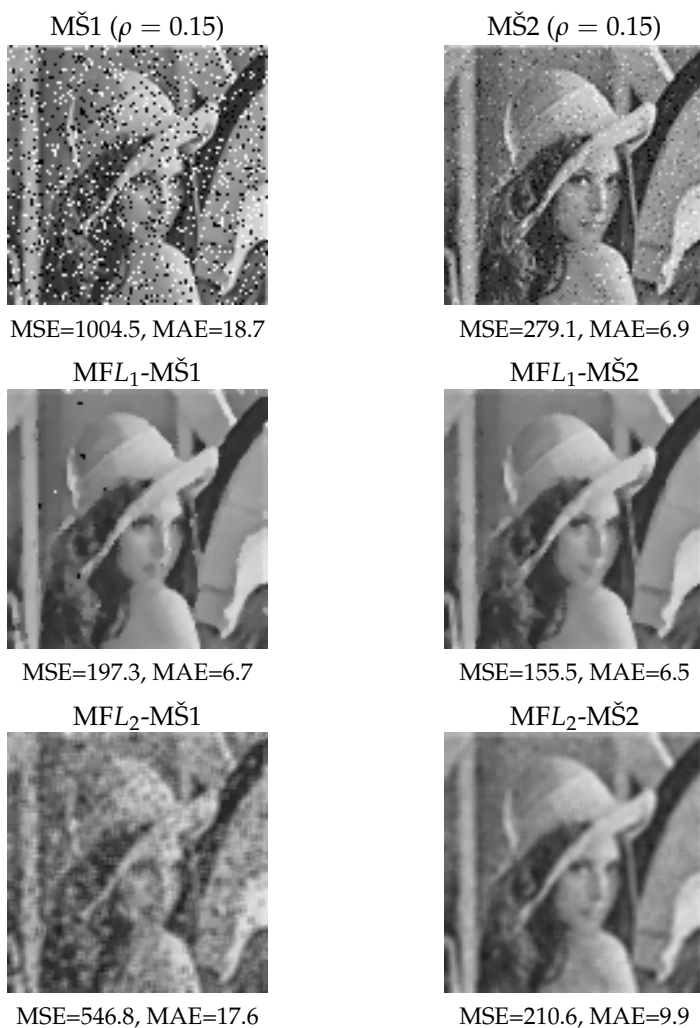
$$MAE = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} |x_{ij} - x_{ij}^*|}{N \times M}. \quad (35)$$

U slučaju da je rekonstruirana slika identična s originalom, MAE i MSE će biti nula. MSE daje dobru informaciju pri uklanjanju impulsnih šumova, dok MAE daje dobru informaciju za promatranje rekonstrukcije detalja slike. Razlog tomu je osjetljivost L_2 norme, odnosno robusnost L_1 norme na outliere (vidite [10]). Na slici 6 je prikazano djelovanja MFL_1 i MFL_2 filtera na dijelu slike prikazane na slici 4. Na slici 7 je prikazano djelovanje



Slika 6: Rezultati filtriranja: (a) MŠ1 ($\rho = 0.4$); (b) MFL_1 ; (c) MFL_2

filtera na eksperimentalnoj slici Lena veličine 100×100 piksela. U prvom retku se nalaze degradirane slike s MŠ1,2 ($\rho = 0.15$), dok drugi i treći redak redom predstavljaju djelovanje filtera MFL_1 , odnosno MFL_2 (simbolički je iznad slike naznačeno djelovanje filtera na degradiranu sliku kao MFL_i -MŠj). Kao programsku podršku korišten je programski paket MATLAB. Unutar MATLAB-a se nalaze gotove naredbe za generiranje različitih tipova šumova, kao i različiti tipovi filtera (vidite [5]).



Slika 7: Rezultati filtriranja

4 Zaključak

U našem istraživanju smo uočili da spomenuti filteri posjeduju svojstvo (21), odnosno (22), što simbolički zapisujemo kao

$$\text{Filter}(\alpha Y + \beta \mathbf{E}) = \alpha \text{Filter}(Y) + \beta \mathbf{E}, \quad (36)$$

gdje je E matrica jedinica veličine $M \times N$, a $\text{Filter}(Y)$ označava filter koji djeluje na degradiranu sliku Y s nekim zadanim filtrirajućim prozorom. Spomenuta svojstva direktno proizlaze iz teorema 2.5 koji opisuje svojstva skalirane i regresijske ekvivarijantnosti srednjih veličina u smislu p -norme. Mjerenja prezentirana u slici 7 pokazuju bolje karakteristike rekonstrukcije slike za MFL_1 u usporedbi s MFL_2 . Na to ukazuju MSE, i MAE gdje MFL_1 postiže bolje rezultate za svaki model šuma.

Literatura

- [1] J. A. Cadzow, *Minimum l_1 , l_2 , and l_∞ norm approximate solutions to an over-determined system of linear equations*, Digital Signal Processing **12**(2002), 524–560.
- [2] R. C. Gonzalez, R. E. Woods, *Digital Image Processing*, Third Edition, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2008.
- [3] C. Gurwitz, *Weighted median algorithms for L_1 approximation*, BIT Numerical Mathematics **12**(2002), 524–560.
- [4] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb 1997.
- [5] O. Marques, *Practical Image and Video Processing Using MATLAB*, John Wiley and Sons, 2011.
- [6] V. Novoselac, B. Zovko-Cihlar, *Image Noise Removal by Vector Median Filter*, Proceedings ELMAR-2012, Croatian Society Electronics in Marine-ELMAR, 2012, 57–62.
- [7] M. R. Osborne, *Finite Algorithms in Optimization and Data Analysis*, Department of Statistics, Australian National University, Canberra, John Wiley, 1985.
- [8] Ž. Pauše, *Uvod u matematičku statistiku*, Školska knjiga, 1993.
- [9] I. Pitas, *Digital Image Processing Algorithms and Applications*, John Wiley and Sons, 2000.
- [10] P. J. Rousseeuw, A. M. Leroy, *Robust Regression and Outlier Detection*, Wiley, New York, 2003.
- [11] K. Sabo, R. Scitovski, *The best least absolute deviations line-properties and two efficient methods for its derivation*, ANZIAM Journal. **50**(2008), 185–198.

- [12] R. Scitovski, *Numerička Matematika*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1999.
- [13] I. Vazler, K. Sabo, R. Scitovski, *Weighted median of the data in solving least absolute deviations problems*, Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 41, No. 8, 2012, 1455-1465.
- [14] G. A. Watson, *Approximation Theory and Numerical Methods*, John Wiley & Sons, 1980.