Ристо Малчески, Скопје
Катерина Аневска, Скопје

НЕРАВЕНСТВО НА ТРИАГОЛНИК И НЕРАВЕНСТВА ВО ТРИАГОЛНИК

Неравенството на триаголник е еден од елементарните факти во геометријата. Тоа тврди дека должината на било која страна на триаголникот е помала од збирот на должините на другите две негови страни. Попрецизно, неравенството на триаголник може да се искаже во следнава форма.

За било кои три точки A, B, C важи

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако точката B припаѓа на отсечката AC.

Доколку точките A, B, C не се колинеарни, тие се темиња на триаголник, па затоа точно е следново тврдење.

Својство 1. Нека a, b, c се должините на три отсечки. Тогаш овие отсечки може да се страни на триаголник ако и само ако се исполнети следниве неравенства: $a+b>c,\ b+c>a$ и $c+a>b$. □

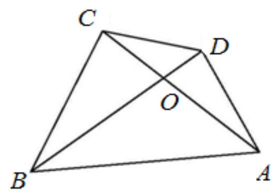
Понатаму, ако за должините на отсечките a, b, c важи $a \geq b \geq c$, тогаш очигледно е дека неравенствата $a+b>c$ и $c+a>b$ се исполнети, па затоа својствот 1 може да се искаже на следниов начин.

Својство 2. Нека a, b, c се должините на три отсечки и нека $a \geq b \geq c$. Тогаш постои триаголник чии страни се овие отсечки ако и само ако $b+c>a$. □

Ќе разгледаме неколку задачи во кои ќе го користиме неравенсството на триаголник.

Задача 1. Докажи дека во секој конвексен четириаголник збирот на должините на дијагоналите е поголем од збирот на должините на две спротивни страни на тој четириаголник.

Решеиие. Нека O е пресекот на дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ (цртеж десно). Од неравенството на триаголник, применето на триаголниците ABO и CDO следува:



$$\overline{AO}+\overline{BO}>\overline{AB} \text{ и } \overline{CO}+\overline{DO}>\overline{CD}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\overline{AC}+\overline{BD}&=(\overline{AO}+\overline{OC})+(\overline{BO}+\overline{OD})\\&=(\overline{AO}+\overline{BO})+(\overline{CO}+\overline{DO})\\&>\overline{AB}+\overline{CD}\end{aligned}$$

Слично се докажува и неравенството

$$\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AD}+\overline{BC}. \blacksquare$$

Задача 2. Докажи дека разликата на основите на трапезот е поголема од разликата на неговите краци.

Решение. Нека е даден трапез $ABCD$ ($AB \| CD$) и нека без ограничување на општоста претпоставиме дека $\overline{CD}\le\overline{AB}$. Нека E е точката на стра AB таква што ната $\overline{AE}=\overline{CD}$. Тогаш четириаголникот $AECD$ е паралелограм, па затоа $\overline{CE}=\overline{AD}$. Исто така, $\overline{BE}=\overline{AB}-\overline{CD}$. Сега, во триаголникот BCE се исполнети неравенствата $\overline{BE}+\overline{CE}>\overline{BC}$ и $\overline{BE}+\overline{BC}>\overline{CE}$, па затоа е исполнето неавенството $\overline{BE}>|\overline{BC}-\overline{CE}|$. Според тоа,

$$\overline{AB}-\overline{CD}=\overline{BE}>|\overline{BC}-\overline{CE}|,$$

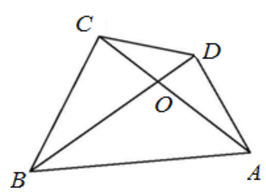
што и требаше да се докаже. ■

Задача 3. Ако за конвексниот чтириаголник $ABCD$ важи

$$\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AC}+\overline{CD},$$

тогаш $\overline{AB}<\overline{AC}$.

Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите AC и BD. Тогаш $\overline{OA}+\overline{OB}>\overline{AB}$ и $\overline{OC}+\overline{OD}>\overline{CD}$. Ги собираме овие неравенства и добиваме



$$\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AB}+\overline{CD}.$$

Од условот на задачата имаме

$$\overline{CD}=\overline{AB}+\overline{BD}-\overline{AC},$$

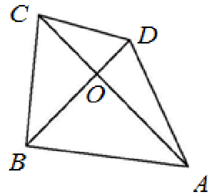
па затоа од последното неравенство следува

$$\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AB}+\overline{AB}+\overline{BD}-\overline{AC},$$

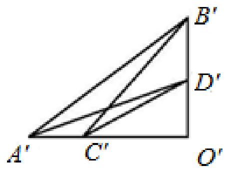
од каде добиваме $2\overline{AC}>2\overline{AB}$, односно $\overline{AC}>\overline{AB}$.

Задача 4. Дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O, тие се заемно нормални и важи $\overline{OA} > \overline{OC}$ и $\overline{OB} > \overline{OD}$ (цртеж десно). Докажи дека

$$\overline{AB} + \overline{CD} < \overline{AD} + \overline{BC}.$$



Решение. Да земеме две заемно нормални полуправи со заедничка почетна точка O'. Нека точките A' и C' се на едната полуправа, а точките B' и D' се на другата полуправа и нека важи



$$\overline{O'A'} = \overline{OA}, \overline{O'B'} = \overline{OB}, \overline{O'C'} = \overline{OC}, \overline{O'D'} = \overline{OD}.$$

Од условот на задачата следува дека $A'C'D'B'$ е конвексен четириаголник со дијагонали $A'D'$ и $B'C'$ и со пар спротивни страни $A'B'$ и $C'D'$. Според задача 1 важи

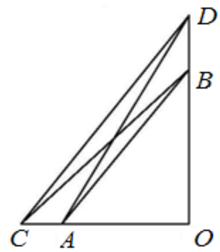
$$\overline{A'B'} + \overline{C'D'} < \overline{A'D'} + \overline{B'C'},$$

од каде што следува тврдењето на задачата. ■

Задача 5. Нека $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека

$$\sqrt{n^2 + (n+2)^2} + \sqrt{(n+1)^2 + (n+3)^2} < \sqrt{n^2 + (n+3)^2} + \sqrt{(n+1)^2 + (n+2)^2}.$$

Решение. Земаме две заемно нормални полуправи со заеднички почеток O (цртеж десно). Нека A и C се точки од едната полуправа, а B и D се точки од другата полуправа такви шо



$$\overline{OA} = n, \overline{OC} = n+1, \overline{OB} = n+2 \text{ и } \overline{OD} = n+3.$$

Од Питагоровата теорема селедува

$$\overline{AB} = \sqrt{n^2 + (n+2)^2}, \overline{CD} = \sqrt{(n+1)^2 + (n+3)^2},$$

$$\overline{AD} = \sqrt{n^2 + (n+3)^2}, \overline{BC} = \sqrt{(n+1)^2 + (n+2)^2}.$$

Четириаголникот $ACDB$ е конвексен со дијагонали AD и BC и пар спротивни страни AB и CD. Според задача 1 точно е неравенството

$$\overline{AB} + \overline{CD} < \overline{AD} + \overline{BC},$$

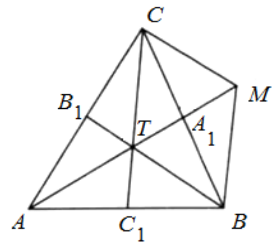
што значи дека точно е неравенството еквивалентно со

$$\sqrt{n^2 + (n+2)^2} + \sqrt{(n+1)^2 + (n+3)^2} < \sqrt{n^2 + (n+3)^2} + \sqrt{(n+1)^2 + (n+2)^2}. \ ■$$

Задача 6. Докажи дека за должините на тежишните линии t_a, t_b, t_c на триаголникот ABC важи

$$t_a < t_b +, t_c .$$

Решение. Нека точките A_1, B, C_1 се соодветно средни на страните BC, CA, AB и нека T е тежиште на триаголникот ABC (цртеж десно). Нека точката M е таква што A_1 е средина на отсечката TM. Тогаш $\overline{TM} = 2\overline{TA_1} = \frac{2}{3} t_a$ Дијагоналите на четириаголникот $BMCT$ се преполовуваат, па затоа тој е паралелограм. Значи, $\overline{BM} = \overline{CT} = \frac{2}{3} t_c$. Исто така и $\overline{BT} = \frac{2}{3} t_b$. Сега, од неравенството на триаголник



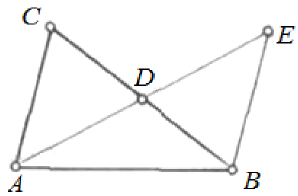
$$\overline{MT} < \overline{BT} + \overline{BM} ,$$

односно $\frac{2}{3} t_a < \frac{2}{3} t_b + \frac{2}{3} t_c$, имаме $t_a < t_b +, t_c$. ■

Задача 7. Нека t_a, t_b, t_c се должините на тежишните линии и s е полупериметарот на триаголникот ABC. Докажи дека

$$s < t_a + t_b + t_c < 2s .$$

Решение. Нека D е средина на страната BC на триаголникот ABC и E е симетричната точка на точката A во однос на точката D. Тогаш четириаголникот $ABEC$ е паралелограм па затоа $\overline{BE} = \overline{AC} = b$. Според тоа,



$$2t_a = \overline{AE} < \overline{AB} + \overline{BE} = b + c \text{, т.е. } 2t_a < b + c .$$

Понатаму, од $t_a > b - \frac{a}{2}$ и $t_a > c - \frac{a}{2}$, добиваме $2t_a > b + c - a$. Според тоа, точни се неравенствата

$$b + c - a < 2t_a < b + c .$$

Аналогно се докажуваат неравенствата

$$c + a - b < 2t_b < c + a \text{ и } a + b - c < 2t_c < a + b .$$

Конечно, ако ги собереме последните три двојни неравенства и поделиме со 2 добиваме

$$s < t_a + t_b + t_c < 2s ,$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 8. Докажи дека за страните a, b, c на произволен триаголник ABC важи:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Решение. Од $b+c>a$ следува $2(b+c)>a+b+c$, т.е. $b+c>\frac{a+b+c}{2}$. Од последното неравенство следува неравенството

$$\frac{a}{b+c}<\frac{2a}{a+b+c}.$$

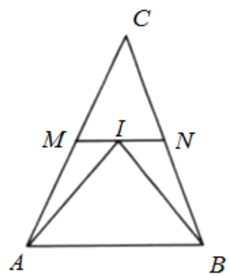
На потполно идентичен начин се доажуваат неравенствата

$$\frac{b}{c+a}<\frac{2b}{a+b+c} \text{ и } \frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства, го добиваме бараното неравенство. ■

Задача 9. Дали центарот на впишаната кружница на триаголникот може да припаѓа на некоја од средните линии на триаголникот.

Решение. Нека M и N се соодветно средини на страните AC и BC на триаголникот ABC и да претпоставиме дека центарот на впишаната кружница I припаѓа на средната линија MN. Бидејќи AB и AC се тангенти, добиваме $\measuredangle BAI=\measuredangle MAI$, акако $MN \| AB$, добиваме $\measuredangle MIA=\measuredangle BAI$. Според тоа, $\measuredangle MAI=\measuredangle MIA$, т.е. триаголникот AIM е рамнокрак. Аналогно се докажува дека триаголникот



BIN е рамнокрак. Според тоа, $\overline{AM}=\overline{MI}$ и $\overline{BN}=\overline{NI}$. Ако ги собереме последните две равенства, добиваме $\overline{AM}+\overline{BN}=\overline{MI}+\overline{NI}=\overline{MN}$, односно $\frac{b}{2}+\frac{a}{2}=\frac{c}{2}$. Значи, $a+b=c$, што противречи на неравенството на триаголник. Од добиената противречност следува дека центарот на впишаната кружница на триаголникот не може да лежи на средна линија на триаголникот. ■

Задача 10. Докажи дека за страните a,b,c на триаголникот ABC се точни неравенствата

$$\frac{1}{4}<\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}.$$

Решение. По квадрирање неравенството на триаголник запишано во видот $|a-b|<c$ (види го решението на задача 2) и користење на неравенството $c<a+b$, последователно добиваме

$$a^2+b^2-2ab<c^2$$
$$a^2+b^2<c^2+2ab$$

$$a^2+b^2+c^2<2c^2+2ab<2c(a+b)+2ab$$
$$a^2+b^2+c^2<2ab+2bc+2ca$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca<4(ab+bc+ca)$$
$$(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$$
$$\frac{1}{4}<\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2},$$

т.е. точно е бараното неравенство. ■

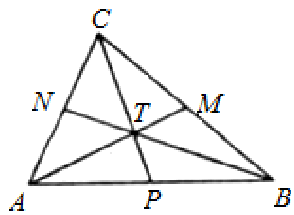
Во задачите 6 и 7 докажавме три едноставни неравенства за тежишните линии во триаголникот. Во следните неколку задачи ќе разгледаме уште неколку неравенства за тежишните линии, од кои едното е подобрување на левото неравенство докажано во задача 7.

Задача 11. Нека t_a, t_b, t_c се должините на тежишните линии во триаголникот ABC и s е неговиот полупериметар. Докажи дека

$$t_a+t_b+t_c>\frac{3}{2}s.$$

Решение. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC (цртеж десно). Тежиштето ги дели тежишните линии во однос $2:1$, сметајќи од темињата на триаголникот, па затоа

$$\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a, \overline{BT}=\frac{2}{3}t_b, \overline{CT}=\frac{2}{3}t_c.$$



Понатаму, од неравенството на триаголник применето на триаголниците ABT, ACT и BCT соодветно добиваме

$$\frac{2}{3}t_a+\frac{2}{3}t_b>c, \quad \frac{2}{3}t_b+\frac{2}{3}t_c>a, \quad \frac{2}{3}t_c+\frac{2}{3}t_a>b.$$

Ако ги собереме последните три неравенства, добиваме

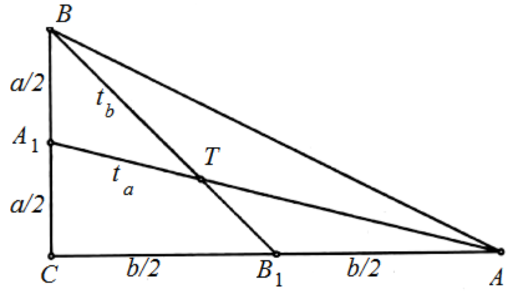
$$2(\frac{2}{3}t_a+\frac{2}{3}t_b+\frac{2}{3}t_c)>a+b+c, \text{ т.е. } t_a+t_b+t_c>\frac{3}{4}(a+b+c)=\frac{3}{2}s. \ ■$$

Задача 12. Докажи, ако во правоаголен триаголник t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b, тогаш точно е неравенството

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\le\frac{t_a+t_b}{a+b}.$$

Решение. Од Питагоровата теорема применета на триаголниците AA_1C и BB_1C (цртеж десно) следува

$t_a^2=(\frac{a}{2})^2+b^2$ и $t_b^2=(\frac{b}{2})^2+a^2$.



Последните равенства ги собираме и добиваме

$$t_a^2+t_b^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2),$$

а потоа ги множиме и добиваме

$$t_a^2t_b^2=\frac{1}{4}(a^4+b^4)+\frac{17}{16}a^2b^2.$$

Од последното равенство и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$t_a^2t_b^2\ge\frac{1}{4}\cdot 2a^2b^2+\frac{17}{16}a^2b^2=\frac{25}{16}a^2b^2,$$

односно $t_at_b\ge\frac{5}{4}ab$. Понатаму,

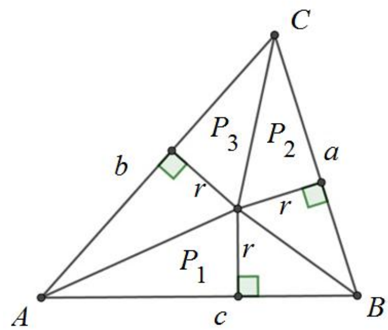
$$(t_a+t_b)^2=t_a^2+t_b^2+2t_at_b\ge\frac{5}{4}(a^2+b^2)+2\cdot\frac{5}{4}ab=\frac{5}{4}(a+b)^2,$$

па затоа точно е бараното неравенство. ■

Задача 13. Даден е $\triangle ABC$ со страни a, b и c и радиус на опишана кружница R. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а P_1, P_2 и P_3 се плоштините на $\triangle ABI$, $\triangle BCI$ и $\triangle CAI$ соодветно. Докажи дека

$$\frac{R^4}{P_1^2}+\frac{R^4}{P_2^2}+\frac{R^4}{P_3^2}\ge 16$$

Решение. Нека r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ (цртеж десно). Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството



$$\frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2}\ge\frac{16}{R^4}.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2}&=\frac{1}{(\frac{rc}{2})^2}+\frac{1}{(\frac{ra}{2})^2}+\frac{1}{(\frac{rb}{2})^2}\\&=\frac{4}{r^2c^2}+\frac{4}{r^2a^2}+\frac{4}{r^2b^2}\\&=\frac{4}{r^2}(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\\&\ge\frac{4}{r^2}\cdot\frac{9}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{4}{r^2}\cdot\frac{1}{R^2}\\&\ge\frac{4}{R^2}\cdot\frac{1}{(\frac{R}{2})^2}=\frac{16}{R^4}.\end{aligned}$$

Притоа, во првиот случај е искористено неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина, и равенство важи ако и само ако $a=b=c$, т.е. триаголникот е рамностран. Во вториот случај е искористени неравенството на Лајбниц во кое равенство важи ако и само ако триаголникот е рамностран и во третиот случај е искористено неравенството на Ојлер и равенство важи ако и само ако триаголникто е рамностран.

Задачи

1. Даден е триаголник $ABC, \measuredangle BAC = 60^\circ$. Докажи дека $\overline{AB}+\overline{AC} \leq 2\overline{BC}$.

2. Докажи, ако точката S припаѓа на внатрешноста на триаголникот ABC и s е полупериметарот на триаголникот, тогаш
$$s < \overline{AS}+\overline{BS}+\overline{CS} < 2s .$$

3. Нека a,b,c,d се должините на страните на конвексен четириаголник и e,f се должините на неговите дијагонали. Докажи дека
$$(a+b+c+d)(e+f) > 2(e^2+f^2) .$$

4. Дали центарот на произволна припишана кружница може да припаѓа на некоја од правите кои ги содржат средните линии на триаголникот?

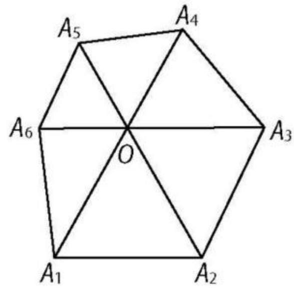
5. Нека t_a,t_b,t_c се тежишните линии, h_a,h_b,h_c се соодветните висини, R е радиусот на опишаната кружница и r е радиусор на впишаната кружница во триаголникот ABC. Докажи дека
$$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c} \leq 1+\frac{R}{r} .$$

6. Нека t_a,t_b,t_c се тежишните линии и P е плоштината на правоаголниот триаголник ABC. Докажи дека
$$t_a^2+t_b^2+t_c^2 \geq 6P .$$

7. Нека a,b,c,d се реални броеви такви што $a<b$ и $c<d$. Докажи дека

$$\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}<\sqrt{a^2+d^2}+\sqrt{d^2+c^2}\,.$$

8. Во внатрешноста на шестаголникот $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ постои точка O од која сите страни на шестаголникот се гледаат по агол од 60° (цртеж десно). Докажи дека ако



$\overline{OA_1}>\overline{OA_3}>\overline{OA_5}$ и $\overline{OA_2}>\overline{OA_4}>\overline{OA_6}$,

тогаш

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}<\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_1}\,.$$

9. Во внатрешноста на $2n-$аголникот $A_1A_2A_3...A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$ постои точка O од која сите страни на $2n-$аголникот се гледаат по агол од $\frac{180^\circ}{n}$ (цртеж десно). Докажи дека ако

$$\overline{OA_1}>\overline{OA_3}>...>\overline{OA_{2n-1}} \text{ и } \overline{OA_2}>\overline{OA_4}>...>\overline{OA_{2n}}\,,$$

тогаш

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+...+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}<\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+...+\overline{A_{2n}A_1}\,.$$