Ристо Малчески,
Скопје

НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

Во оваа статија ќе го разгледаме неравенствата меѓу аритметичката, геометриската и хармониската средина и нивната примена. За таа цел напрво ќе го докажеме следново помошно тврдење кое е неопходно за натамошните разгледувања.

Тврдење 1. ако $x_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$ и $x_1 x_2 ... x_n = 1$ тогаш

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n,$$

при што $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Доказ. Даденото неравенство ќе го докажеме со математичка индукција по n.

i) За $n = 1$ неравенството е точно и притоа важи знак на равенство.

Ако $n = 2$ и $x_1 x_2 = 1$, тогаш едниот број е поголем или еднаков на 1, а другиот е помал или еднаков на 1, на пример $x_1 \leq 1$ и $x_2 \geq 1$. Според тоа,

$$x_1 + x_2 = 1 + x_1 x_2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) = 2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq 2$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x_2 - 1 = 0$ или $1 - x_1 = 0$, што заедно со $x_1 x_2 = 1$ дава $x_1 = x_2 = 1$.

ii) Нека претпоставиме дека за $n = k$ и произволни реални броеви x_i, $i = 1, 2, ..., k$, чиј производ е единица, точно е неравенството

$$x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_i = 1,\ i = 1, 2, ..., k$.

Нека $n = k + 1$ и $x_1, ..., x_{k+1}$ се позитивни реални броеви за кои $x_1 x_2 ... x_k x_{k+1} = 1$. Ако сите x_i не се еднакви на 1, тогаш имаме броеви поголеми од 1, но и помали од 1. Без ограничување на општоста можеме да земеме $x_1 < 1$ и $x_2 > 1$. Тогаш имаме k позитивни броеви $x_1 x_2, x_3, ..., x_{k+1}$ чиј производ е еднаков на 1, па според индуктивната претпоставка добиваме

$$x_1 x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1 x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1.$$

Но, тогаш

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} &= 1 + x_1 x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_k + x_{k+1} + (x_2 - 1)(1 - x_1) \\ &\geq k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq k + 1 \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1 x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$$

и при тоа $(x_2 - 1)(1 - x_1) = 0$ т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$. ♦

Пример 1. Нека $a_i > 0, i = 1,2,...,n$ и $\varphi(a_i), i = 1,2,...,n$ е произволна пермутација на множеството $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Докажете дека

$$\frac{a_1}{\varphi(a_1)} + \frac{a_2}{\varphi(a_2)} + ... + \frac{a_n}{\varphi(a_n)} \geq n. \qquad (1)$$

Решение. Ако φ е пермутација на множеството $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, тогаш

$$a_1 a_2 ... a_n = \varphi(a_1)\varphi(a_2)...\varphi(a_n),$$

т.е.

$$\frac{a_1}{\varphi(a_1)} \cdot \frac{a_2}{\varphi(a_2)} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{\varphi(a_n)} = 1.$$

Сега неравенството (1) непосредно следува од тврдењето 1 и притоа знак за равенство важи ако и само и ако $\frac{a_i}{\varphi(a_i)} = 1, i = 1,2,...,n$. ♦

Дефиниција. Нека се дадени n позитивни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Броевите

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \ (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}, \ \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска и хармониска средина* на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$, соодветно.

Теорема (неравенства на Коши). За аритметичката, геометриската и хармониската средина на позитивните реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Доказ. Означуваме $\beta_n = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}$. Да ги разгледаме следниве n позитивни реални броеви $y_i = \frac{a_i}{\beta_n}$, $i = 1,2,...,n$. За броевите y_i, $i = 1,2,...,n$ важи $\prod_{i=1}^{n} y_i = 1$, што според тврдење 1 значи $y_1 + y_2 + ... + y_n \geq n$, т.е.

$$\frac{a_1}{\beta_n} + \frac{a_2}{\beta_n} + ... + \frac{a_n}{\beta_n} \geq n$$

односно $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}$. Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $y_1 = y_2 = ... = y_n$ т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Од претходно изнесеното имаме:

$$\frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n}} = (\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{a_n})^{1/n} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}}$$

односно $(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = ... = \frac{1}{a_n}$ т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$. ♦

Пример 2. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1 a_2 ... a_n = 1$. Докажете дека

$$(4 + a_1)(4 + a_2)...(4 + a_n) \geq 5^n.$$

Решение. Од неравенството межу аритметичката и геометриската средина следува

$$4 + x = 5 \cdot \frac{1+1+1+1+x}{5} \geq 5\sqrt[5]{x}, \text{ за секој } x > 0. \qquad (2)$$

Ако ги искористиме неравенството (2) и условот $a_1 a_2 ... a_n = 1$ добиваме

$$(4 + a_1)(4 + a_2)...(4 + a_n) \geq 5^n \sqrt[5]{a_1 a_2 ... a_n} = 5^n.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$. ♦

Пример 3. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Докажете дека

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \geq n^{-2}. \qquad (3)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и од условот $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ непосредно следува дека

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}, \text{ т.е. } \sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \geq \frac{n^{-2}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i} = n^2.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n = \frac{1}{n}$. ♦

Пример 4. Докажете го неравенството

$$n! < (\tfrac{n+1}{2})^n, \; n > 1.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, применето на броевите $a_i = i, i = 1, ..., n$, равенството $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ и фактот дека $a_i \neq a_k$, $i \neq k$ добиваме

$$n! < (\tfrac{1+2+...+n}{n})^n = [\tfrac{n(n+1)}{2n}]^n = (\tfrac{n+1}{2})^n. \text{ ♦}$$

Пример 5. Докажете дека за секој природен број n и за секои ненегативни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^k}{k!}.$$

Решение. Нека

$$s = a_1 + a_2 + ... + a_n .$$

Ако прво го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, а потоа ја искористиме Њутновата биномна формула и искористиме дека $n(n-1)...(n-k+1) \le n^k$, за $k = 1, 2, ..., n$ добиваме

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \le (1+\tfrac{s}{n})^n = 1 + \tfrac{n}{1!}\tfrac{s}{n} + \tfrac{n(n-1)}{2!}\tfrac{s^2}{n^2} + ... + \tfrac{n!}{n!}\tfrac{s^n}{n^n}$$

$$\le 1 + \tfrac{s}{1!} + \tfrac{s^2}{2!} + ... + \tfrac{s^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\tfrac{(a_1+a_2+...+a_n)^k}{k!}.$$

Јасно, за $n \ge 2$ знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. ♦

Пример 6. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви такви што $x_1 x_2 ... x_n = a$. Докажете дека

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \ge (1+\sqrt[n]{a})^n .$$

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во видот

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) = 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n + x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n +$$
$$+ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n + ... + x_1x_2...x_n .$$

Притоа производи од видот $x_i x_j$ има $\binom{n}{2}$, производи од видот $x_i x_j x_k$ има $\binom{n}{3}$ итн. Од равенството (4), неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и Њутновата биномна формула следува

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) = 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n + x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n +$$
$$+ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n + ... + x_1x_2...x_n$$
$$\ge 1 + n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} + \tbinom{n}{2}\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^2} + \tbinom{n}{3}\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^3} + ... + \tbinom{n}{n}\sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^n}$$
$$= 1 + n\sqrt[n]{a} + \tbinom{n}{2}\sqrt[n]{a^2} + \tbinom{n}{3}\sqrt[n]{a^3} + ... + \tbinom{n}{n}\sqrt[n]{a^n} = (1+\sqrt[n]{a})^n ,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 7. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви. Докаже дека

$$\tfrac{x_1}{x_2+x_3+...+x_n} + \tfrac{x_2}{x_1+x_3+...+x_n} + ... + \tfrac{x_n}{x_1+x_2+...+x_{n-1}} \ge \tfrac{n}{n-1} .$$

Решение. Нека $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина применето на броевите $S_i = S - x_i , i = 1, 2, ..., n$ и фактот дека

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = nS - \sum_{i=1}^{n} x_i = nS - S = (n-1)S$$

добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{S_i} \ge n^2 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)S\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{S_i} \ge n^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\tfrac{S}{S_i} \ge \tfrac{n^2}{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\tfrac{S_i+x_i}{S_i} \ge \tfrac{n^2}{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(1+\tfrac{x_i}{S_i}) \ge \tfrac{n^2}{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\tfrac{x_i}{S_i} \ge \tfrac{n^2}{n-1} - n = \tfrac{n}{n-1} ,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 8. Докажете го неравенството

$$(x^2+y^2+2)^{x^4+y^4} > (x^4+y^4+2)^{x^2y^2}.$$

Решение. Имаме

$$(x^2+y^2+2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2+4x^2+4y^2+4 > x^4+y^4+2.$$

Сега од горното неравенство и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+2)^{x^4+y^4} &= [(x^2+y^2+2)^2]^{\frac{x^4+y^4}{2}} \geq [(x^2+y^2+2)^2]^{\sqrt{x^4y^4}}\\ &= [(x^2+y^2+2)^2]^{x^2y^2} > (x^4+y^4+2)^{x^2y^2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 9. Докажете дека за секој $n \geq 2$ важи

$$\log_n 2 \cdot \log_n 4 \cdot \ldots \cdot \log_n (2n-2) \leq 1.$$

Решение. Од неравенството межу аритметичката и геометриската средина и од својствата на логаритмите следува

$$\begin{aligned}\sqrt{\log_n k \cdot \log_n (2n-k)} &\leq \tfrac{1}{2}[\log_n k + \log_n (2n-k)] = \tfrac{1}{2}\log_n k(2n-k)\\ &\leq \tfrac{1}{2}\log_n [\tfrac{k+2n-k}{2}]^2 = \tfrac{1}{2}\log_n n^2 = 1,\end{aligned}$$

за $k = 1, 2, \ldots, n$. Според тоа, производите на паровите кои се еднакво оддалечени од краевите на изразот $A = \log_n 2 \cdot \log_n 4 \cdot \ldots \cdot \log_n (2n-2)$ не надминуваат единица, па значи $A \leq 1$, за $n = 2k+1$. Но, $A \leq 1$ и за $n = 2k$, бидејќи

$$\log_n (2n-n) = \log_n n = 1. \text{ ♦}$$

Пример 10. Докажете дека за секој природен број $n > 1$ важи

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < n - n^{\frac{n-1}{n}}. \qquad (4)$$

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина го добиваме неравенството

$$\begin{aligned}n-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}) &= 1+(1-\tfrac{1}{2})+(1-\tfrac{1}{3})+\ldots+(1-\tfrac{1}{n}) = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\ldots+\tfrac{n-1}{n}\\ &\geq n\sqrt[n]{1\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\tfrac{n-1}{n}} = n\sqrt[n]{\tfrac{1}{n}} = n^{\frac{n-1}{n}},\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (4). ♦

На крајот од оваа статија ќе наведеме неколку задачи за самостојна работа, кои како и разгледаните примери се на ниво на задачите кои се задаваат на националните и меѓународните натпревари по математика за учениците од средното образование.

Задача 1. Докажете дека за $x \geq 2,\ y \geq 2,\ z \geq 2$ важи неравенството

$$(y^3+x)(z^3+y)(x^3+z) \geq 125xyz.$$

Упатство. Искористете дека за $a \geq 2$ важи $a^3 + b \geq 4a + b$, а потоа применете го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина.

Задача 2. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажете дека

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z .$$

Задача 3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 1$. Докажете го неравенството: $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \geq 64$.

Задача 4. Докажете, дека за секој $x > 0$ и за секој природен број n важи

$$1+\frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x} .$$

Задача 5. Докажете, дека ако $x > y \geq 0$, тогаш

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3 .$$

Задача 6. Нека a, b, c, d се позитивни реални броеви и m, n се природни броеви. Докажете го неравенството

$$\sqrt[m+n]{a^m c^n} + \sqrt[m+n]{b^m d^n} \leq \sqrt[m+n]{(a+b)^m (c+d)^n} .$$

Упатство. Поделете го даденото неравенство со $\sqrt[m+n]{(a+b)^m (c+d)^n}$, а потоа одделно за секој од двата собирци применете го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина.

Задача 7. Докажете го неравенството: $(n!)^2 < [\frac{(n+1)(2n+1)}{6}]^n, n > 1$.

Задача 8. Докажете го неравенството

$$1+\frac{1}{1!\sqrt{2!}}+\frac{1}{2\sqrt{2!}\sqrt[3]{3!}}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\sqrt[n-1]{(n-1)!}\sqrt[n]{n!}} > \frac{2(n^2+n-1)}{n(n+1)} .$$

Упатство. Искористете го пример 4 за да докажете дека

$$\frac{1}{(k-1)\sqrt[k-1]{(k-1)!}\sqrt[k]{k!}} \geq \frac{1}{1+2+\ldots+(k-1)} - \frac{1}{1+2+\ldots+k}$$

а потоа соберете ги добиените неравенства.

Задача 9. Ако $a, b, c > 1$ или $0 < a, b, c < 1$ докажете дека

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c} .$$

Упатство. Применете го двапати неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и искористете дека $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1$.

Литература

1. Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene,* Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Малчески, Р.: *Основи на математичка анализа,* Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Скопје, 2001
3. Mitrinović, D. S.; Vasić, P. M.: *Analitičke nejednakosti,* Građevinska knjiga, Beograd, 1970

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ