Републички натпревар 1980

I година

1. За обележување (нумерирање) на страниците на еден речник употребени се 6869 цифри. Колку страници има речникот?

Решение. За обележување на првите 999 страници потребни се

$$9+2\cdot 90+3\cdot 900=2889 \text{ цифри.}$$

Останувaат уште $6869-2829=3980$ цифри. Со нив можат да се обележат уште $3980:4=995$ страници. Според тоа, вкупниот број на страници на речникот е $999+995=1994$.

2. Да се докаже дека кубот на најголемиот од три последователни природни броеви е различен од збирот на кубовите од другите два.

Решение. Да претпоставиме дека за некој број x е точно равенството

$$(x-1)^3+x^3=(x+1)^3.$$

Горното равенство е еквивалентно со равенството

$$x^2(x-6)=2,$$

кое е невозможно во множеството на природни броеви, бидејќи левата страна на тоа равенство за $1\le x\le 6$ е помала или еднаква на нула, а за $x>6$ таа е поголема од 36.

3. Во еден тетраедар со раб a е впишана сфера и околу него е опишана сфера. Да се најдат соодветните радиуси и волуменот на пирамидата со темиња во точките во кои впишаната сфера го допира тетраедарот.

Решение. Центрите на впишаната и опишаната сфера во и околу правилниот тетраедар $ABCS$ (види цртеж) се совпаѓаат и се наоѓаат во пресекот на висините на тетраедарот. Нека тоа биде точката O.

Јасно е дека:

$$\overline{SO}+\overline{OK}=\frac{a\sqrt{6}}{3}, \qquad (1)$$

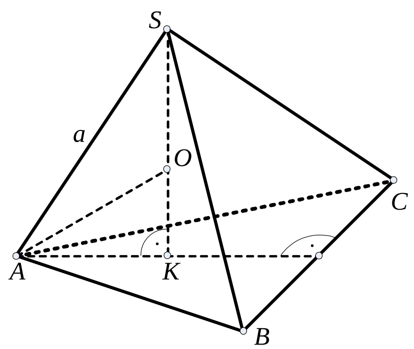
(висина на правилен тетраедар со раб a),

$$\overline{OK}^2=\overline{OA}^2-\overline{AK}^2. \qquad (2)$$

Бидејќи $\overline{AK}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, од равенството (2) добиваме

$$\overline{OK}^2=\overline{SO}^2-\frac{a^2}{3},$$

па ако се искористи равенството (1), се добива дека радиусот на впишаната сфера е



$\overline{OK}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$, а радиусот на опишаната сфера е $\overline{OS}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Работ на пирамидата, со темиња во допирните точки на впишаната сфера во тетраедарот со раб a и тој тетраедар изнесува $\frac{a}{3}$ и затоа волуменот на пирамидата е

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot(\frac{a}{3})^2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\frac{a}{3}\sqrt{6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{324}.$$

4. На еден шаховски турнир учесниците играле секој со секого по еднаш и ниту една партија не завршила реми. Да се покаже дека меѓу учесниците постои шахист A со следното својство: ако B е некој друг учесник на турнирот, тогаш A го победил B, или постои шахист C којшто е победен од A и го победил B.

Решение. Ќе разгледаме три случаи:

- сите шахисти освоиле еднаков број поени,
- неколку (не сите) шахисти освоиле најголем еднаков број поени,
- само еден шахист освоил најмногу поени.

Во првиот случај кој било од учесниците е бараниот шахист A, бидејќи ако B е некој друг учесник, тогаш или A го победил B и тогаш навистина сме го нашле учесникот A, или A изгубил од B, во кој случај мора да постои шахист C кој изгубил од A и го победил B, оти ако таков нема, сите други шахисти или го победиле A, па A би имал најмал број поени што не е можно, или изгубиле од B, па B би имал најмногу поени што исто така не е можно.

Во вториот случај, кој било од тие неколку кои имаат најмногу, но ист број поени е бараниот шахист A. Проверката за тоа е слична како и во случајот 1.

Во третиот случај бараниот шахист A е победникот на турнирот кој има најмногу поени. И тука проверката е слична како и во случајот 1.

II година

1. Чамец тргнува надолу по реката во 10 часот. Истиот момент од него е пуштена топка. По 15 минути чамецот се враќа по топката. Во колку часот чамецот ќе ја сретне топката?

Решение. Нека брзината на реката е v, а брзината на чамецот во мирна вода е v_1. Ако чамецот тргнал од точката A и по $15\ \text{min}$ стинал во точката B (направи цртеж), тој поминал пат $\overline{AB}=\frac{1}{4}(v+v_1)\ km$. За тоа исто време топката од A дошла во C и поминала пат $\overline{AC}=\frac{1}{4}v$.

Од точката B чамецот се враќа назад. Да претпоставиме дека по x часови ја сретнал топката во точката E. Тогаш $\overline{BE}=x(v_1-v)$, $\overline{CE}=xv$, па од

$$\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{EB}=\overline{AB}$$

и од претходните равенки добиваме $x=\frac{1}{4}$ час $=15$ минути. Според тоа, чамецот ќе ја сретне топката во 10 часот и 30 минути.

2. Да се најде најмалиот природен број $n>1$ со следново својство: постои множество M од n точки во рамнината такви што секоја права AB ($A,B\in M$) е паралелна со некоја друга права CD ($C,D\in M$).

Решение. Очигледно е дека $n\neq 2,3$. Исто така не постои множество M од четири точки во рамнината со бараното својство, бидејќи во произволен четириаголник дијагоналата не е паралелна со другата дијагонала, ниту со која било страна.

Множеството M составено до темињата на еден правилен петаголник го има бараното својство. Според тоа, $n=5$.

3. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=19^2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \\ x-y+z=11 \end{cases}.$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=19^2 \\ xy+yz+zx=0 \\ x-y+z=11 \end{cases}$$

од каде што добиваме

$$\begin{cases} (x+y+z)^2=19^2 \\ x-y+z=11 \end{cases}.$$

Последниов систем е еквивалетен со следниве два система

$$\begin{cases} x+z=15 \\ y=4 \end{cases} \qquad (1)$$

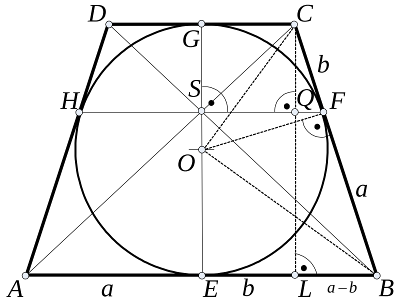
$$\begin{cases} x+z=-4 \\ y=-15 \end{cases} \qquad (2)$$

Од системот (1) и која било од равенките на дадениот систем ги добивме следниве две решенија: $(\frac{15+\sqrt{465}}{2},4,\frac{15-\sqrt{465}}{2})$ и $(\frac{15-\sqrt{465}}{2},4,\frac{15+\sqrt{465}}{2})$.

Од системот (2) и било која од равенките на дадениот систем се добиваат следниве две решенија: $(6,-15,-10)$ и $(-10,-15,6)$.

4. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез опишан околу кружницата k и нека E,F,G,H се допирните точки на страните AB,BC,CD,DA со k соодветно. Покажи дека пресекот на правите AC и BD се совпаѓа со пресекот на правите EG и HF.

Решение. Нека S е пресекот на отсечките HF и EG, а O е центарот на впишаната кружница во трапезот $ABCD$ (види цртеж). Имаме



$$\triangle SOF \sim \triangle CQF \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{SO}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{QF}}{\overline{CF}},$$

$$\triangle CQF \sim \triangle CLB \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{QF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{CB}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

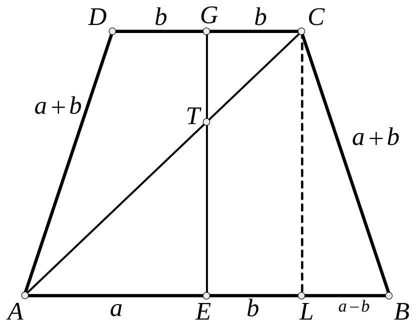
Притоа OF е висина на правоаголниот триаголник BCO и затоа $\overline{OF} = \sqrt{ab}$. Затоа $\overline{SO} = \sqrt{ab}\,\frac{a-b}{a+b}$, додека од

$$\overline{OE} = \overline{OF} \text{ и } \overline{SE} = \overline{SO} + \overline{OE}$$

се добива $\overline{SE} = \frac{2a\sqrt{ab}}{a+b}$.

Ако T е пресекот на дијагоналата AC на трапезот и отсечката EG (види цртеж), тогаш од $\triangle ATE \sim \triangle ACL$ се добива

$$\overline{TE} = \frac{2a\sqrt{ab}}{a+b}.$$



Значи, добиваме дека отсечките SE и TE се еднакви, од каде што следува дека точките T и S се поклопуваат што требаше и да се докаже.

III година

1. За кои вредности на a равенката

$$1+\sin^2 ax = \cos x$$

има единствено решение?

Решение. Од дадената равенка и од $\sin^2 ax \geq 0$, $\cos x \leq 1$, добиваме $\sin^2 ax = 0$ и $\cos x = 1$, од каде што се добива дека

$$ax = k\pi, \quad x = 2k\pi,$$

каде што k и m се цели броеви.

Ако a е ирационален број, тогаш од $a \cdot 2m = k$ се добива $m = k = r$, па дадената тригонометриска равенка ќе го има единственото решение $x = 0$.

Ако a е рационален број, од $ax = k\pi$ и $x = 2m\pi$, јасно дека равенката ќе има бесконечно многу решенија.

Според тоа, равенката ќе има единствено решение ако a е ирационален број.

2. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Решение. Од $xy=3$ заклучуваме дека $x>0$ и $y>0$, или $x<0$ и $y<0$. Од дефинираноста на $\log_2(x+y)$ и погоре кажаното следува дека $x,y>0$.

Исто така, $x+y>1$, бидејќи x или y е поголемо од 1, кое се добива од позитивноста на x и y и од $xy=3$.

Од сето тоа следува дека дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + |\log_2(x-y)| = 3 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Ако е $0<x-y<1$, тогаш горниот систем се трансформира во системот

$$\frac{x+y}{x-y}=8,\ xy=3,$$

и решавајќи го него го добиваме решението $(\frac{3}{7}\sqrt{21},\frac{1}{3}\sqrt{21})$.

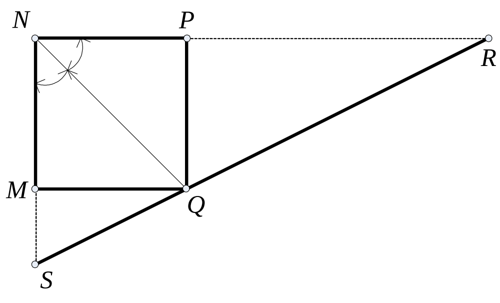
Ако $x-y>1$, се доаѓа до системот

$$\begin{cases} x^2-y^2=8 \\ xy=3 \end{cases},$$

и решение на овој систем кој ги задоволува условите $x-y>1$ и $x,y>0$, е $x=3, y=1$.

3. Да се конструира квадрат така што сите негови страни да минуваат низ три колинеарни точки.

Решение. Нека дадените три колинеарни точки се S,Q и R. Од условот на задачата веднаш следува дека едно теме од квадратот што треба да се конструира мора да биде во една од дадените три точки. Нека тоа биде точката Q. Ако темињата на бараниот квадрат ги обележиме со M,N,P и Q, тогаш ако ја конструираме точката N, јасно е како ќе се добијат и останатите темиња M и P (види цртеж).



Точката N се добива како пресек на следниве две геометриски места на точки:

- геометриско место на точки од кои отсечката RS се гледа под прав агол.
- геометриско место на точки од кои отсечката SQ (QR) се гледа под агол од 45°.

Познато е како се конструираат тие две геометриски места.

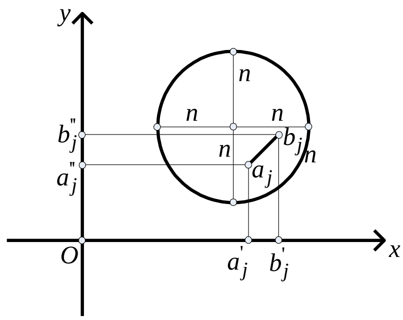
4. Во рамнината е дадена кружница со радиус $n\mathrm{cm}\,(n\in\mathbb{N})$ и произволна права. Во кружницата се наоѓаат $4n$ отсечки со должини $1\,\mathrm{cm}$. Докажи дека постои права, паралелна или нормална на дадената, која има заеднички точки со најмалку две од дадените отсечки.

Решение. Да го сместиме кругот и $4n$-те отсечки a_kb_k, $k=1,2,3,...,4n$ во правоаголен систем, при што апсцисната оска ја положуваме на дадената права. Нека $a_k^{'}b_k^{'}$ и $a_k^{''}b_k^{''}$ се проекциите на отсечките a_kb_k на Ox и Oy-оската, соодветно. Ќе покажеме дека не може проекциите на Ox-оската да бидат дисјунктни меѓу себе и исто така дека проекциите на Oy оската не може да бидат дисјунктни меѓу себе. Ако споменатите проекции се дисјунктни, тогаш очигледните неравенства

$$\sum_{k=1}^{4n} a_k^{'}b_k^{'} < 2n, \qquad \sum_{k=1}^{4n} a_k^{''}b_k^{''} < 2n,$$

го даваат неравенството

$$\sum_{k=1}^{4n}[a_k^{'}b_k^{'}+a_k^{''}b_k^{''}] < 4n \qquad (3)$$



Можеме да претпоставиме дека барем една отсечка a_kb_k зафаќа остар агол со Ox-оската, т.е. можеме да претпоставиме дека за барем еден j е исполнето неравенството

$$a_j^{'}b_j^{'}+a_j^{''}b_j^{''} > a_jb_j, \qquad (4)$$

зошто ако сите отсечки a_kb_k се паралелни со Ox-оската или сите отсечки a_kb_k се паралелни со Oy-оската, тогаш очигледно е дека ќе постои права со бараното својство.

Од неравенствата $a_k^{'}b_k^{'}+a_k^{''}b_k^{''} \geq a_kb_k$, $k=1,2,3,...,4n$ и од неравенствата (3) и (4) се добива неравенство $4n<4n$ (неравенството $a_j^{'}b_j^{'}+a_j^{''}b_j^{''} > a_jb_j$ следува од тоа што збирот на две страни на еден триаголник е поголем од третата страна; види цртеж), што е противречност.

IV година

1. Нека a,b,c се три различни броеви и нека за нив важат равенствата:

$$a^3+pa+q=0$$
$$b^3+pb+a=0$$
$$c^3+pc+q=0$$

Да се докаже дека $a+b+c=0$.

Решение. Од првата равенка ја одземаме втората и од првата ја одземаме третата равенка на дадениот систем. Така ги добиваме равенствата:

$$a^2+ab+b^2+p=0$$

$$a^2+ac+c^2+p=0$$

од каде што, пак со одземање на едната од другата, добиваме $a+b+c=0$.

2. Дадени се две кружници кои се допираат и имаат радиуси r и $2r$. Да се најде геометриското место на точките еднакво оддалечени од дадените кружници.

Решение. Да ги сместиме дадените кружници во правоаголниот координатен систем така што нивните центри да лежат на Ox-оската, а допирната точка се наоѓа во координатниот почеток.

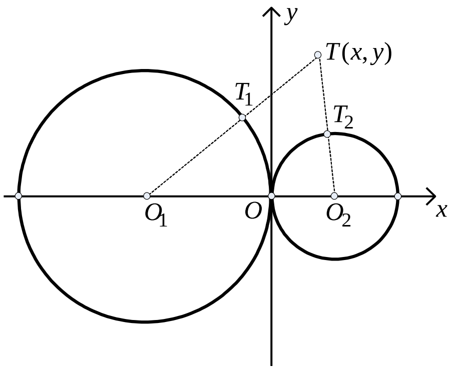
I *случај*. Кружниците се допираат однадвор (види цртеж).

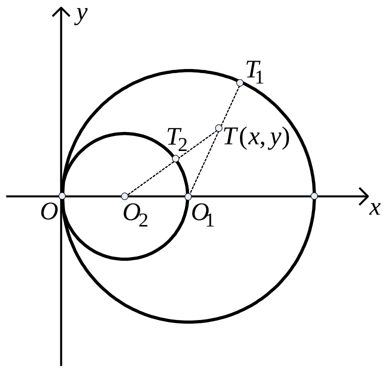
Ако $T(x,y)$ е точка, надвор од кружинците, која припаѓа на бараното геометриско место, тогаш од условот $\overline{TT_1}=\overline{TT_2}$, т.е. $\overline{TO_1}-2r=\overline{TO_2}-r$, се добива

$$8(x+\tfrac{r}{2})^2-y^2=2r^2$$

што претставува равенка на хипербола. Очигледно е дека сите точки од отсечката O_1O_2 исто така припаѓаат на геометриското место.

II *случај*. Кружинците се допираат одвнатре (види цртеж).





И во овој очигледно е дека сите точки од непозитивниот дел на Ox-оската припаѓаат на бараното геометриско место на точки. Дали има други точки од тоа геометриско место? Ако $T(x,y)$ е таква точка, тогаш јасно е дека T мора да биде надвор од помалата, а внатре, во поголемата кружница. Тогаш, од условот на задачата добиваме $\overline{TT_1}=\overline{TT_2}$, т.е. $2r-\overline{TO_1}=\overline{TO_2}-r$, од каде што се добива

$$8(x-\tfrac{3r}{2})^2+9y^2=18r^2$$

што претставува равенка на елипса.

3. Дадени се четири топки кои имаат еднакви радиуси r, и кои се допираат две по две. Околу нив е опишана петта топка. Да се најде радиусот на петтата топка.

Решение. Центрите на четирите топки се темиња на правилен тетраедар со раб $2r$. Центарот на петтата топка се наоѓа во пресекот на висините на тој тетраедар, па бидејќи растојанието од пресекот на висините на еден правилен тетраедар со раб a до кое било негово теме изнесува $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, радиусот на петтата топка ќе биде

$$\frac{2r\sqrt{6}}{2}+r=\frac{r}{2}(2+\sqrt{6})$$

4. Иста како задача 4 од трета година.